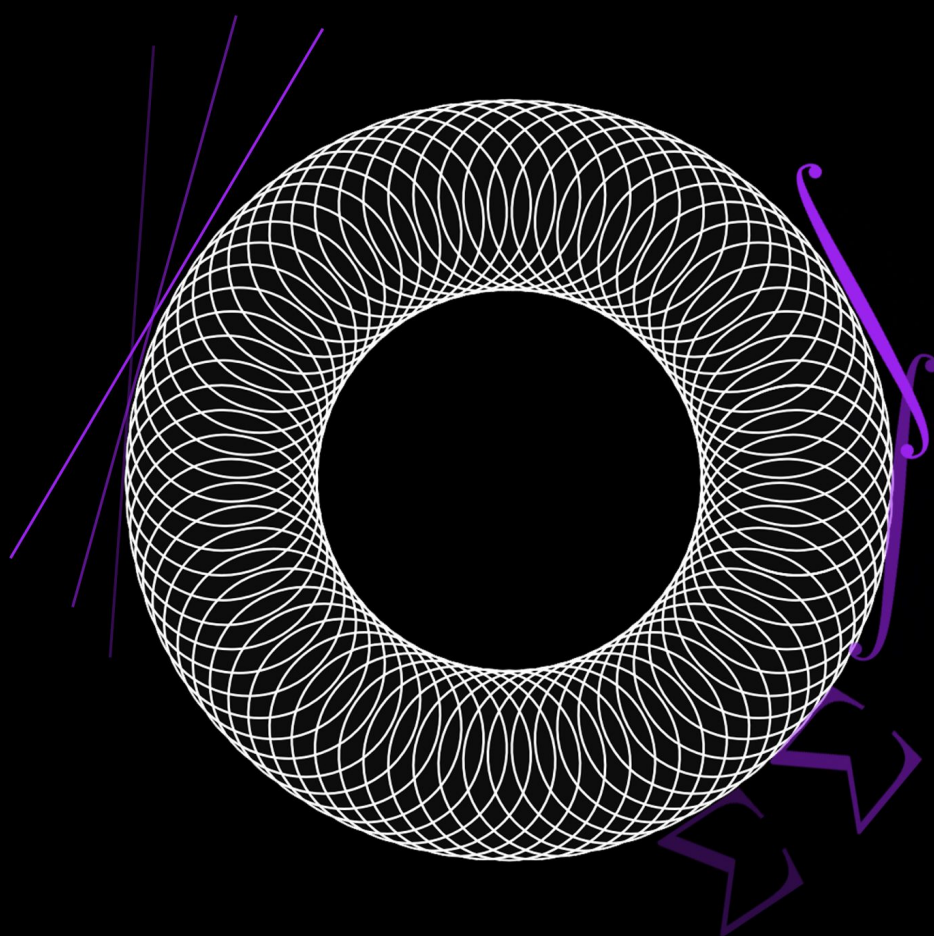


CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM UMA VARIÁVEL REAL

V. H. S. LINS



TUDO QUE VOCÊ PRECISA PARA APRENDER SOZINHO

TEORIA, EXEMPLOS, ILUSTRAÇÕES, ANIMAÇÕES E 150 EXERCÍCIOS
COM RESOLUÇÕES COMENTADAS.



CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL EM UMA VARIÁVEL REAL

Victor Lins

Copyright ©2024, Victor Lins.

*É vedada a cópia e reprodução não autorizada dessa obra sob qualquer
circunstância.*

Resumo.

Este é um livro-texto de cálculo diferencial e integral em uma variável real, abordando toda a teoria acerca de limites, derivadas e integrais de funções reais, com demonstrações e intuição de resultados. A obra também totaliza 150 exercícios selecionados entre os mais instrutivos presentes nas principais bibliografias de cálculo e análise matemática utilizadas em todo o mundo. Todas as questões possuem gabarito e resolução detalhada no final do livro. O livro também conta com dezenas de exemplos ao longo dos capítulos para auxiliar o aluno no seu processo de aprendizagem, além de animações que ajudam na visualização dos conceitos e na fixação do que está sendo estudado (as animações podem ser visualizadas escaneando o QR Code respectivo e devidamente destacado). Há ainda quatro apêndices com conteúdos de matemática para apoio do estudante.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP) (Câmara Brasileira do Livro, SP, Brasil)

Lins, Victor

Cálculo diferencial e integral em uma variável
real / Victor Lins. -- São Paulo : Ed. do Autor,
2024.

ISBN 978-65-01-21741-3

1. Cálculo - Estudo e ensino 2. Cálculo
diferencial 3. Cálculo integral I. Título.

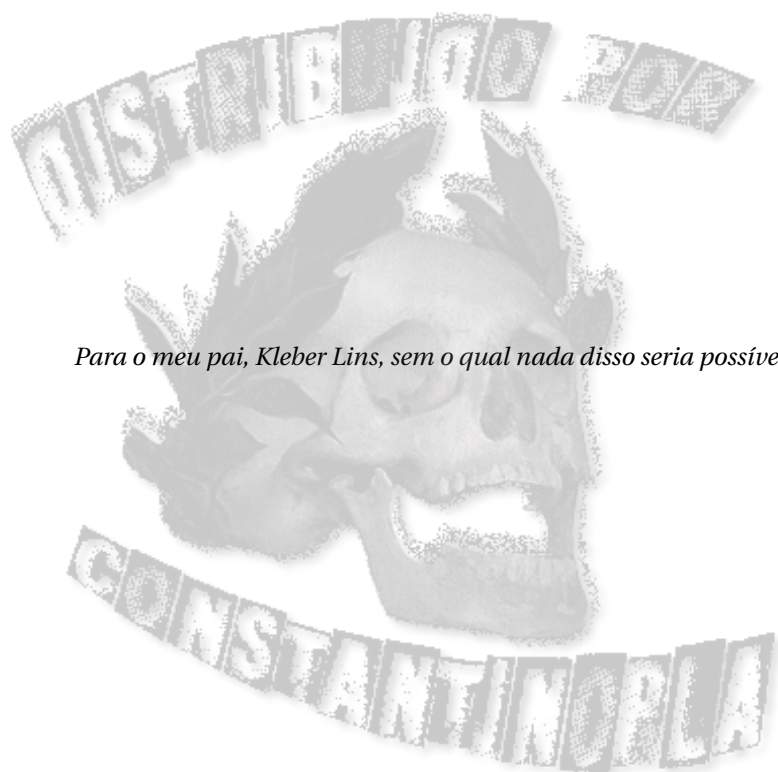
24-237261

CDD-515

Índices para catálogo sistemático:

1. Cálculo : Matemática 515

Eliane de Freitas Leite - Bibliotecária - CRB 8/8415



Para o meu pai, Kleber Lins, sem o qual nada disso seria possível.

Conteúdo

■ 1	Limites	1
1.1	O formalismo ϵ/δ para definição de limites	1
1.2	Limites laterais	4
1.3	Continuidade	6
1.4	Teorema de Bolzano e Valor Intermediário	8
1.5	Limites no infinito, limites infinitos e assíntotas	11
1.6	Limites trigonométricos	14
1.7	Exercícios de limites	21
■ 2	Derivadas	29
2.1	Definição e propriedades da derivada	29
2.2	Pontos críticos	35
2.3	Derivação Implícita	37
2.4	Teoremas de Weierstrass, Rolle, Cauchy e L'Hôpital	39

2.5	Diferencial e taxas relacionadas	45
2.6	Séries de Taylor e Maclaurin	48
2.7	Exercícios de derivada	53
■ 3	Integrais	67
3.1	A integral de Riemann em toda a sua glória	67
3.2	Teorema Fundamental do Cálculo	72
3.3	Técnicas de integração	78
3.3.1	Substituição	78
3.3.2	Integração por partes	80
3.3.3	Frações parciais	81
3.3.4	Técnica de Feynman	83
3.4	Área entre funções	83
3.5	Comprimento de arco	86
3.6	Volume do sólido de revolução	88
3.7	Área superficial do sólido de revolução	90
3.8	Exercícios de integrais	93
■ A	Somatório e Produtório	104
■ B	Conteúdo de apoio: animações!	107
■ C	Bibliografias recomendadas	108
■ D	Orientações para estudar matemática	110
D.1	Como saber se tenho boa base em matemática?	110
D.2	Existe forma certa de estudar matemática?	110
D.3	Matemática é difícil, o que fazer?	111
D.4	Como saber se eu aprendi algo e avançar?	111
■	Gabaritos	112
■	Resoluções Comentadas	116

Prefácio

Resolver questões é a parte mais importante do processo de aprendizagem. Exige que você pense no conteúdo que leu na bibliografia, desenvolva ideias que conduzam até a solução dos problemas, reflita e interprete a respeito dos resultados, questione se fazem sentido, entre outros processos ativos. Essas etapas são responsáveis por fixar na sua memória o conteúdo lido, porque fornecem significado ao que se lê, forçam a criação e recombinação de caminhos neurais para o desenvolvimento das novas ideias. Contudo, resolver questões leva tempo e o nosso tempo é finito, nosso mais valioso e escasso recurso. Isso significa que precisamos escolher muito bem quais e quantas questões vamos resolver, para utilizar o nosso tempo da forma mais eficaz o possível. Acontece que quando estamos estudando os assuntos pela primeira vez, ainda não temos experiência o suficiente para realizar esse filtro corretamente. Além disso, é comum que estudantes de matemática se queixem da abstração envolvida na teoria. Recursos didáticos como ilustrações, animações e uma linguagem fluida, convidativa mas sem perder rigor, são escassos na maior parte da literatura. Esses fatores dificultam o processo de aprendizagem e desestimulam os estudantes.

Tendo em vista essas falhas e ausência de boa solução na literatura, escrevi este livro, com o intuito de resolvê-las à minha maneira. Selecionei minuciosamente as 150 questões de Cálculo Diferencial e Integral em uma variável real mais instrutivas que consegui encontrar consultando diversas bibliografias. Por “instrutivas”, entenda que se tratam de questões que vão explorar o máximo possível do conteúdo, uma gama de habilidades e técnicas úteis que estimularão sua criatividade e intuição matemática. Estou certo de que o estudante que se propor a resolver todas as questões presentes nesse livro possa se convencer que possui uma formação adequada em Cálculo Diferencial e Integral em uma variável real e estará apto a resolver qualquer exame que aborde este conteúdo. Todos os capítulos contam com teoria completa e detalhada, demonstrações, ilustrações e animações de apoio. Sugiro que leia todos os apêndices para

um melhor proveito da obra. Bons estudos! Precisando de alguma ajuda ou tendo alguma sugestão de melhoria no material, me contate no Instagram (@vhslins) ou envie um email em vhslins@gmail.com.

Como usar este livro e o que esperar dele?

O objetivo dessa obra é servir como uma fonte confiável de teoria e questões, autocontida e suficiente para o seu aprendizado no Cálculo I, com linguagem leve mas sem perder rigor. A maioria das questões que estão nesse livro não são fáceis, algumas podem te custar boas horas e outras talvez dias — mas te garanto que serão todas muito instrutivas. **Gostaria de te pedir para não olhar as resoluções antes de ter tentado bastante.** Por “bastante” entenda pelo menos algumas horas, com alguns dias de intervalo, depois de procurar rever a teoria, assistir vídeos, conversar com amigos a respeito, tirar dúvidas com professor... se mesmo assim a resolução não sair, sinta-se à vontade para falar “**eu desisto**” e ver as minhas resoluções. Essa é a melhor forma de passar pelo processo de aprendizagem em matemática, sem estar se enganando.

Digo isso porque é muito simples ver uma resolução e acompanhar o que está escrito ali. Você diz: “ah, faz muito sentido essa resolução, agora eu entendi o assunto”. **Não é tão simples assim.** Se você estiver minimamente contextualizado com o assunto e for dotado de um cérebro, a parte mais fácil é conseguir acompanhar uma resolução bem redigida e enxergar sentido nela. Outra coisa completamente diferente é estar com o seu cérebro treinado na tentativa e erro, procurado vários caminhos de resolver e falhado, criado repertório e experiência. Consegue ver como essas duas coisas são brutalmente distintas? **É por isso que você não pode ficar viciado em ver resoluções.** Embora esta obra tenha as resoluções para todas as questões, elas devem ser o seu último recurso. **Confira o gabarito, na página de gabaritos, quando quiser ver se você fez certo.** As páginas de resolução só devem ser utilizadas quando você disser “**eu desisto**”. Eu também recomendo olhar a resolução de uma questão que você acertou, porque a minha forma de resolver pode ter sido diferente da sua.

Limites

“A natureza está escrita em linguagem matemática.”

— GALILEU GALILEI

1.1 ■ O formalismo ϵ/δ para definição de limites

Limites são operações matemáticas que investigam o comportamento de funções em torno de pontos específicos, tendências. São fundamentais no cálculo e na análise matemática, pois são eles que constroem os conceitos de derivada e de integral de Riemann.

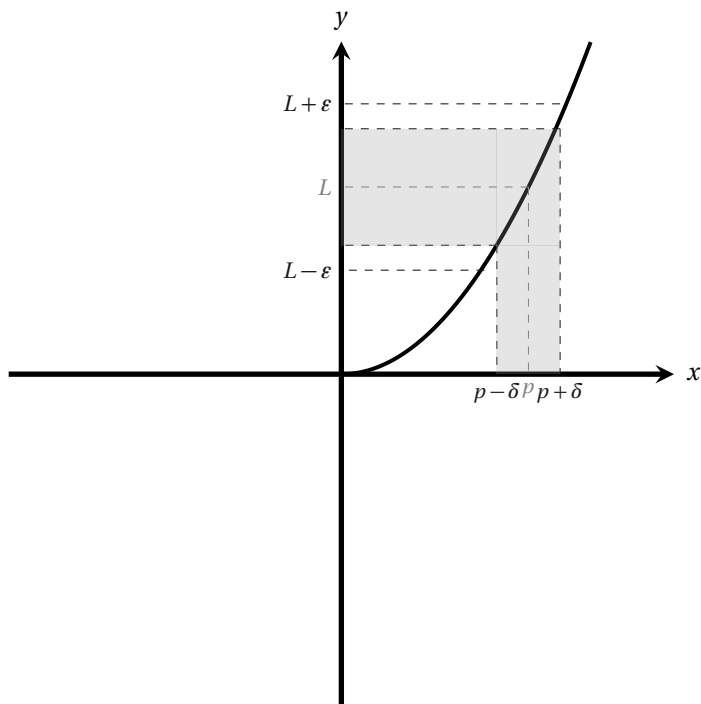
Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo aberto em torno de p , exceto possivelmente em p mesmo. Dizemos que o limite de $f(x)$ quando x se aproxima de p é L , e escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow p} f(x) = L,$$

se, para qualquer $\epsilon > 0$, existir um $\delta > 0$ tal que, para todo x ,

$$0 < |x - p| < \delta \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Na prática, pense que o ϵ escolhido caracteriza uma vizinhança em torno do ponto L — o “tamanho” dessa vizinhança é justamente o ϵ . Se pudermos mostrar que para qualquer $\epsilon > 0$ escolhido (não importa quão pequeno) é possível formar uma vizinhança em torno de p , determinando um tamanho δ para ela, de tal forma que quando fazemos x percorrer essa vizinhança em torno de p a função $f(x)$ ainda fica dentro da vizinhança respectiva em torno de L , então a função possui limite L em p . Observe a figura a seguir para visualizar esse cenário.



Leia quantas vezes for necessário o parágrafo anterior e se convença que essa é uma excelente definição para limite, pois considera bem as tendências em torno dos pontos e “quebra” nos casos anômalos em que temos saltos ou pontos em que a função diverge (vai ao infinito), efetivamente indicando pontos onde o limite intuitivamente não existe.

Uma observação sutil: o fato de que na definição de limite dizemos “[...] definida em um intervalo aberto em torno de p , exceto possivelmente em p mesmo” e o fato de que aparece a análise da proximidade dos pontos se dá na forma $0 < |x - p| < \delta$, isto é, com $|x - p|$ estritamente maior do que zero (indicando que x não coincide com p na nossa análise), retrata o fato notável de que o limite pode existir mesmo que a função não esteja definida no ponto p em questão.

A seguir, elenco as principais propriedades e regras a respeito dos limites, teoremas importantes envolvendo limites e informações adicionais que você pode precisar para resolver as questões do capítulo.

PROPRIEDADES DOS LIMITES

Sejam f e g funções, e c , L , e M constantes. Suponha que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, então:

1. O limite de uma constante é a própria constante

$$\lim_{x \rightarrow a} c = c$$

2. O limite de um produto por uma constante é a constante vezes o limite da função

$$\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot L$$

3. O limite da adição é a adição dos limites

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$$

4. O limite do produto é o produto dos limites

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$$

5. O limite do quociente é o quociente dos limites

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}, \quad \text{se } M \neq 0$$

6. O limite de uma função elevada a um expoente racional é a potência do limite

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x)]^{p/q} = L^{p/q}, \quad \text{se } L^{p/q} \text{ é real e com } p, q \in \mathbb{Z}$$

7. O limite de uma raiz é a raiz do limite

$$\lim_{x \rightarrow a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{L}, \quad \text{imposto que } L \geq 0 \text{ quando } n \text{ é par.}$$

8. Em uma composição de funções, o limite vai à mais interna

$$\lim_{x \rightarrow a} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow a} g(x)) = f(M)$$

Demonstração. Para cada propriedade, usaremos a definição de limite.

1. Limite de uma constante: Seja c uma constante. Para qualquer $\epsilon > 0$, note que $|c - c| = 0 < \epsilon$, independentemente do valor de x ou de sua proximidade a a . Logo, $\lim_{x \rightarrow a} c = c$.
2. Limite do produto por uma constante: Dado $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, queremos mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot L$. Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$, existe $\delta > 0$ tal que, se $0 < |x - a| < \delta$, então $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{|c|}$ para $c \neq 0$. Logo,

$$|c \cdot f(x) - c \cdot L| = |c| \cdot |f(x) - L| < |c| \cdot \frac{\epsilon}{|c|} = \epsilon.$$

Assim, $\lim_{x \rightarrow a} [c \cdot f(x)] = c \cdot L$.

3. Limite da adição: Queremos mostrar que $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$. Seja $\epsilon > 0$. Como $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ e $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que $|f(x) - L| < \frac{\epsilon}{2}$ e $|g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2}$ quando $0 < |x - a| < \delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Então,

$$|[f(x) \pm g(x)] - (L \pm M)| \leq |f(x) - L| + |g(x) - M| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Portanto, $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \pm g(x)] = L \pm M$.

Usando técnicas similares e manipulações, podemos mostrar os demais pela definição — espero que a essa altura você tenha conseguido a intuição da coisa. São escolhas convenientes de δ 's a partir de ϵ 's dados. $\square$

1.2 ■ Limites laterais

Quando definimos os limites, utilizamos os módulos para expressar distâncias, mas isso significa que realizamos a análise nos aproximando de um ponto p por números maiores do que p e também menores do que p , já que a distância é simétrica. Porém, em alguns casos, estamos interessados em avaliar o comportamento das funções quando nos aproximamos

de determinados pontos exclusivamente pela direita ou exclusivamente pela esquerda, o que motiva a definição de *limites laterais*. Como você já teve que enfrentar a definição rigorosa de limite no início desse capítulo, vou poupá-lo do preciosismo de fazer a mesma coisa aqui para limites laterais, mas a essa altura você já possui a intuição correta. Para expressar limites laterais, colocamos um índice acima do ponto de tendência:

$$\lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$$

que indica que estamos estudando o comportamento de $f(x)$ quando nos aproximamos de p por pontos maiores do que p , ou seja, à sua direita na reta real. Já quando escrevemos

$$\lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$$

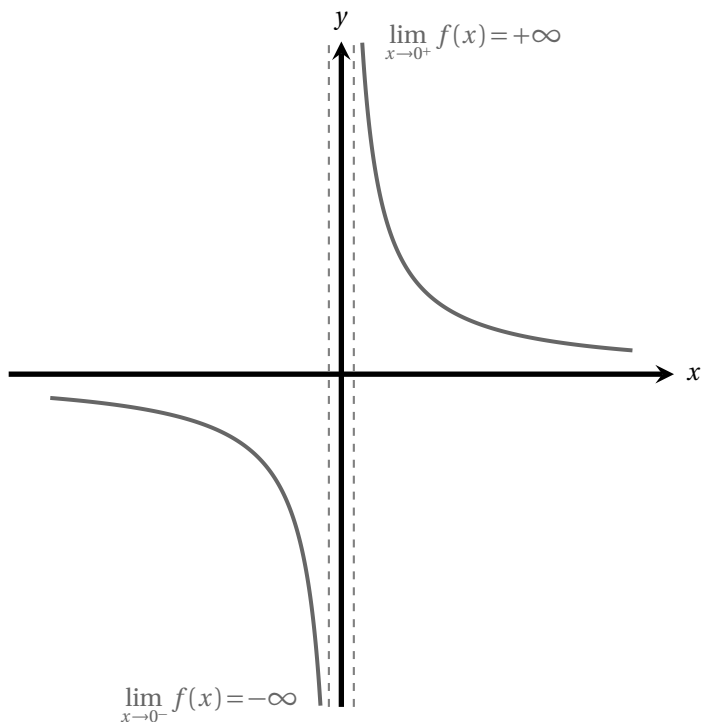
o análogo ocorre, mas aqui estamos nos aproximando por pontos menores do que p , ou seja, à sua esquerda na reta real. A princípio talvez possa parecer uma formalização inútil mas, muito pelo contrário, usamos isso para garantir que um limite sequer existe e também para verificar a **continuidade** de uma função em um ponto dado. Vamos explorar essas duas coisas.

PROPOSIÇÃO.

Seja $L_1 = \lim_{x \rightarrow p^+} f(x)$ e $L_2 = \lim_{x \rightarrow p^-} f(x)$. O limite L de $f(x)$ quando x se aproxima de p existirá se, e somente se, $L_1 = L_2$ e teremos que

$$L = \lim_{x \rightarrow p} f(x) = L_1 = L_2$$

Você pode se perguntar: “ok, eu entendo que os limites laterais precisam existir e serem iguais para o limite existir e que, nesse caso, o limite será identicamente igual a essas limites laterais, mas em que casos isso não aconteceria?”. A resposta para a sua pergunta é: sempre que a função apresentar anomalias como saltos ou comportamentos opostos em seu gráfico. Observe o gráfico a seguir, da função $f(x) = 1/x$, que ilustra isso muito bem.



Os limites laterais não só são distintos nesse exemplo, mas também são infinitos! Aproveito o ensejo para te contar que quando existem esses *limites infinitos*, dizemos que a função *diverge* no ponto em questão. Eles aparecerão sempre que ocorrer a razão de uma função finita e não-nula no ponto por uma função infinitésima (isto é, que tende a zero) conforme nos aproximamos do ponto. Não só isso, mas também podemos avaliar limites *no infinito*, no sentido de que podemos fazer $x \rightarrow \pm\infty$. Estudaremos isso em mais detalhes em breve.

1.3 ■ Continuidade

CONTINUIDADE

Dizemos que uma função $f(x)$ é contínua em um ponto p quando ela “continua a ser o que é” em uma vizinhança em torno de p . Isto é, não apresenta saltos, não diverge em p , está definida em

p e $f(p) = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$. Quando uma função $f(x)$ é contínua em todos os pontos do seu domínio, diremos simplesmente que f é *contínua*.

Se qualquer uma dessas condições não for satisfeita, ou seja, se $f(x)$ apresentar um salto em p , divergir em p , não estar definida em p ou o limite em p não existir, diremos que a função é *descontínua* em p . Funções que apresentam saltos são as chamadas funções definidas por partes: aquelas que possuem diferentes expressões para diferentes intervalos de seu domínio. Para analisar a continuidade nos pontos dessas funções em que elas trocam de expressão, precisamos calcular os limites laterais.

EXEMPLO 1

Considere a função $f(x)$ dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x < 0 \\ x + 1, & x \geq 0 \end{cases}$$

Para verificar a continuidade em $x = 0$, calculamos os limites laterais:

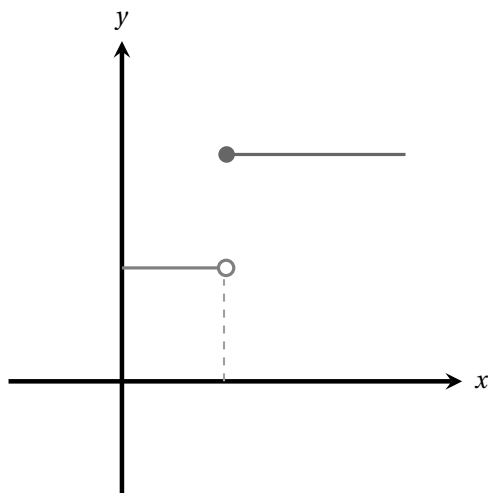
$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^-} x^2 = 0 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x + 1) = 1 \end{aligned}$$

Como $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) \neq \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$, dizemos que $f(x)$ é descontínua em $x = 0$.

Você deve ter lido várias vezes a expressão “a função apresenta salto em p ” mas ainda não visualizou o que quero dizer por “salto”. Observe a figura a seguir para entender esse tipo de descontinuidade, a respeito da função $g(x)$ definida por casos:

$$g(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

Note que no ponto $x = 1$ há um salto de $y = 1$ para $y = 2$. Assim, podemos dizer que $g(x)$ é descontínua em $x = 1$.



Pensando no exemplo que vimos anteriormente, poderíamos dizer que a função $f(x) = 1/x$ é descontínua em $x = 0$, porque diverge nesse ponto e também o limite não existe nele. Além disso, eu enfatizo uma característica importante que acabamos de ver na definição de continuidade:

Uma função $f(x)$ é contínua em p se, e somente se, vale

$$f(p) = \lim_{x \rightarrow p} f(x)$$

Isso é particularmente útil para calcular o limite de funções contínuas — nesses casos, basta avaliar a função no ponto em que x está tendendo.

1.4 ■ Teorema de Bolzano e Valor Intermediário

Vamos agora estudar alguns teoremas muito importantes no cálculo, que auxilia na dedução de outros resultados. Recomendo que estude os enunciados e as demonstrações com calma, caso tenha interesse em aprender cálculo de verdade. Caso seja sua primeira vez estudando cálculo, pode deixar para analisar esses teoremas com mais calma depois. Antes de elencar os teoremas, gostaria de relembrar os conceitos de supremo e ínfimo.

LEMBRETE DE SUPREMO E ÍNFINO

Seja $f(x)$ uma função definida em um conjunto $A \subseteq \mathbb{R}$.

- Dizemos que $M \in \mathbb{R}$ é o supremo de f em A (denotado por $M = \sup f(x)$ para $x \in A$) se:
 1. $f(x) \leq M$ para todo $x \in A$ (ou seja, M é um limite superior de f em A),
 2. Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $f(x) > M - \varepsilon$ (ou seja, M é o menor dos limites superiores).
- Dizemos que $m \in \mathbb{R}$ é o ínfimo de f em A (denotado por $m = \inf f(x)$ para $x \in A$) se:
 1. $f(x) \geq m$ para todo $x \in A$ (ou seja, m é um limite inferior de f em A),
 2. Para qualquer $\varepsilon > 0$, existe $x \in A$ tal que $f(x) < m + \varepsilon$ (ou seja, m é o maior dos limites inferiores).

Em resumo, o supremo de $f(x)$ em A é o menor valor que é maior ou igual a todos os valores de $f(x)$ em A , e o ínfimo é o maior valor que é menor ou igual a todos os valores de $f(x)$ em A . Agora sim, vamos atacar os teoremas.

TEOREMA DE BOLZANO

Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Se $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais opostos, ou seja, $f(a) \cdot f(b) < 0$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = 0.$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < 0$ e $f(b) > 0$. Como f é contínua em $[a, b]$, sabemos que ela não “salta” de um valor para outro; qualquer valor intermediário entre $f(a)$ e $f(b)$ será assumido por f em algum ponto de $[a, b]$. Vamos usar um processo de subdivisão para encontrar um ponto onde f seja igual a zero. Dividimos o intervalo $[a, b]$ ao meio, obtendo o ponto médio $m = \frac{a+b}{2}$.

- Se $f(m) = 0$, encontramos o ponto $c = m$ tal que $f(c) = 0$, como desejado.
- Se $f(m) \neq 0$, então $f(m)$ é positivo ou negativo. Se $f(m) > 0$, então $f(a) < 0$ e $f(m) > 0$, indicando que f muda de sinal no intervalo $[a, m]$. Neste caso, substituímos o intervalo original $[a, b]$ por $[a, m]$.
- Se $f(m) < 0$, então $f(m) < 0$ e $f(b) > 0$, indicando que f muda de sinal no intervalo $[m, b]$. Neste caso, substituímos o intervalo original $[a, b]$ por $[m, b]$.

Repetimos esse processo de subdivisão: a cada passo, dividimos o intervalo atual em dois e escolhemos a metade onde f ainda muda de sinal nas extremidades. Assim, o novo intervalo selecionado continua contendo um ponto onde f é negativa e outro onde f é positiva. Esse processo garante que o comprimento do intervalo se reduz pela metade a cada passo, formando uma sequência de intervalos $[a_n, b_n]$ onde $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$ para todos n .

Como o comprimento dos intervalos $[a_n, b_n]$ tende a zero conforme $n \rightarrow \infty$, esses intervalos convergem para um único ponto $c \in [a, b]$. Ou seja, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = c$. Pela continuidade de f , o limite dos valores de f nos pontos a_n e b_n ao longo dessa sequência também deve coincidir com $f(c)$. Como $f(a_n) < 0$ e $f(b_n) > 0$ para todos n , temos que $f(c)$ não pode ser nem positiva nem negativa. Portanto, deve ser $f(c) = 0$, como queríamos demonstrar.

□

TEOREMA DO VALOR INTERMEDIÁRIO (TVI)

Seja f uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e seja N um valor entre $f(a)$ e $f(b)$. Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f(c) = N.$$

Demonstração. Suponha, sem perda de generalidade, que $f(a) < N < f(b)$. Definimos a função $g(x) = f(x) - N$, que é contínua em

$[a, b]$ pois f é contínua. Note que $g(a) = f(a) - N < 0$ e $g(b) = f(b) - N > 0$. Pelo Teorema de Bolzano, como $g(x)$ é contínua em $[a, b]$ e muda de sinal entre a e b , deve existir um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$g(c) = 0,$$

ou seja, $f(c) = N$. □

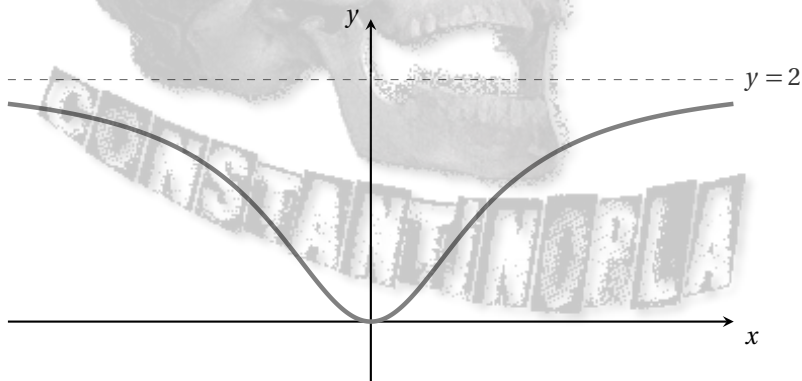
1.5 ■ Limites no infinito, limites infinitos e assíntotas

Podemos estudar também os chamados **limites no infinito**, que nos informam sobre o comportamento da função à medida que $x \rightarrow \infty$ ou $x \rightarrow -\infty$. Em tais casos, a função pode tender a um valor específico, o que indica a presença de uma **assíntota¹ horizontal**.

Dizemos que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

indica que $f(x)$ se aproxima do valor L conforme $x \rightarrow \infty$. Para enxergar isso melhor, considere a função $f(x) = \frac{2x^2}{x^2+1}$ cujo comportamento para $x \rightarrow \infty$ nos revela a assíntota horizontal $y = 2$ (veja a figura a seguir).



Funções como a do exemplo anterior são chamadas de racionais: expressões do tipo $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinômios. O comportamento de uma função racional para $x \rightarrow \infty$ é determinado pelos termos de maior grau

¹Uma reta guia que indica tendência.

em $P(x)$ e $Q(x)$, porque os demais vão a zero conforme $x \rightarrow \infty$. Considere a função $f(x) = \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + 5}$. Podemos simplificar a análise observando apenas os termos de maior grau no numerador e no denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 - x + 2}{x^2 + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2 \left(1 - \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2}\right)}{x^2 \left(1 + \frac{5}{x^2}\right)} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^2}{x^2} = 3$$

Assim, concluímos que a função $f(x)$ possui uma assíntota horizontal em $y = 3$. Esse raciocínio pode ser aplicado a outras funções racionais, levando em conta os graus relativos dos polinômios $P(x)$ e $Q(x)$. Se o grau de $P(x)$ é maior que o grau de $Q(x)$, o ato de colocar os termos de maior grau em evidência vai simplificar a expressão de modo que no numerador vai sobrar alguma potência de x , e assim o limite é infinito. Quando o grau de $Q(x)$ for maior que o de $P(x)$, o inverso ocorre: sobra potências de x apenas no denominador, e assim o limite é zero.

Alguns limites, quando avaliados em torno de um ponto, tendem ao infinito. Chamamos esses de “limites infinitos” e eles indicam que existe ali naquele ponto uma **assíntota vertical** (a função “explode” para cima ou para baixo, indicando ∞ ou $-\infty$). Há ainda mais um tipo de assíntota, chamada de **oblíqua**, que ocorre quando avaliamos um limite conforme $x \rightarrow \pm\infty$ e a função simplifica para a forma $f(x) = ax + b$ (que claramente diverge, no sentido de resultar em $\pm$ conforme $x \rightarrow \pm\infty$, no entanto esse comportamento geometricamente significa que a divergência ocorre alinhada à uma reta oblíqua). As assíntotas oblíquas geralmente ocorrerão quando avaliamos limites no infinito de funções racionais onde $P(x)$ tem grau maior que $Q(x)$ em exatamente uma unidade, situação na qual podemos dividir um polinômio pelo outro e avaliar o limite. Explicitamente, a condição para existência de assíntota oblíqua é a seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0 \iff \text{assíntota oblíqua } y = mx + b \quad (1.1)$$

EXEMPLO 2

Mostremos que a função $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x - 1}$ possui uma assíntota oblíqua. Para encontrá-la, dividimos o numerador pelo denominador:

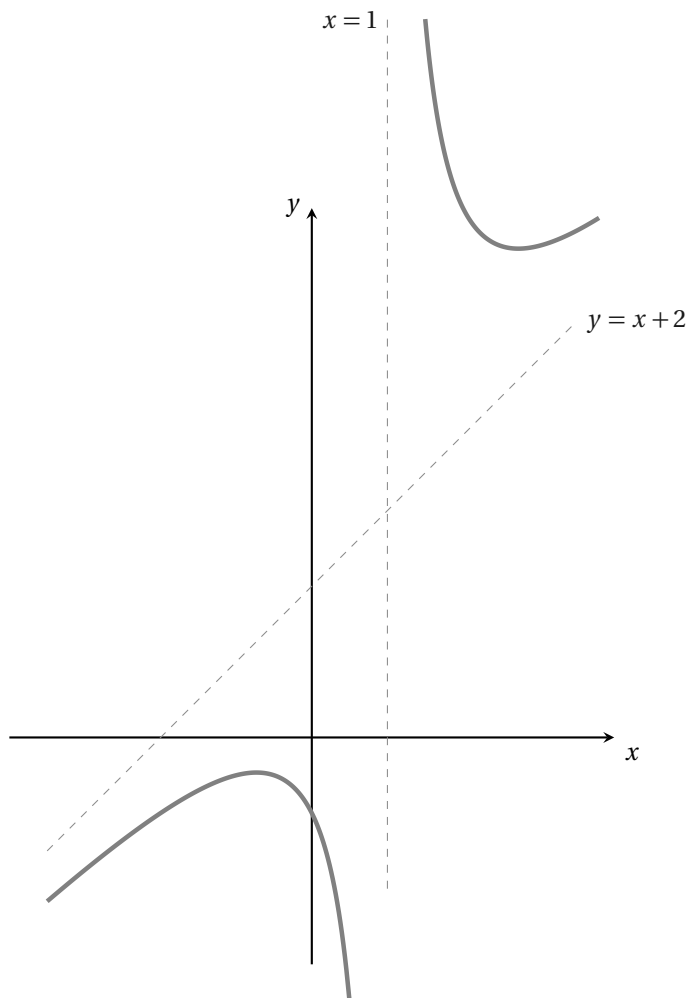
$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{3}{x - 1} \implies f(x) = x + 2 + \frac{3}{x - 1}$$

Observe que o termo $\frac{3}{x-1}$ tende a zero quando $x \rightarrow \infty$. Portanto,

conforme $x \rightarrow \infty$, a função $f(x)$ se aproxima da reta:

$$y = x + 2$$

que é a assíntota procurada. A figura a seguir ilustra esta assíntota. Você consegue determinar alguma outra?



ANIMAÇÃO: ENCONTRANDO ASSÍNTOTAS

Escaneie o QR code para assistir a animação sobre a determinação de assíntotas e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!

**1.6 ■ Limites trigonométricos**

Visando expandir nosso conhecimento acerca de limites, vamos estudar um teorema muito útil que vai nos ajudar, em particular, na determinação de limites trigonométricos.

TEOREMA DO CONFRONTO

Sejam f , g , e h funções definidas em uma vizinhança de c (exceto possivelmente em c mesmo), isto é, os pontos x em que $0 < |x - c| < r$ para algum $r > 0$. Se, para todo x nessa vizinhança de c , temos

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x),$$

e se

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L,$$

então, $g(x)$ também se aproxima de L quando x se aproxima de c , ou seja,

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L.$$

Demonstração. Por hipótese, $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \lim_{x \rightarrow c} h(x) = L$, portanto para qualquer $\epsilon > 0$ dado, existem $\delta_1 > 0$ e $\delta_2 > 0$ tais que

$$0 < |x - p| < \delta_1 \implies L - \epsilon < f(x) < L + \epsilon \quad (1.2)$$

$$0 < |x - p| < \delta_2 \implies L - \epsilon < h(x) < L + \epsilon \quad (1.3)$$

o que vem da própria definição de limite. Agora, tomando convenientemente $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$, isto é, o menor entre esses três números, podemos escrever o seguinte:

$$0 < |x - p| < \delta \implies L - \epsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < L + \epsilon$$

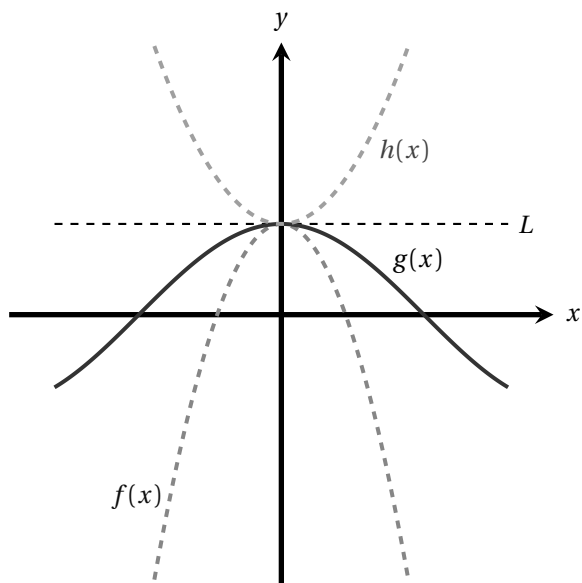
A desigualdade $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ vem da hipótese, enquanto que as cotas inferior e superior $L - \epsilon$ e $L + \epsilon$, respectivamente, são uma consequência das equações (1.2) e (1.3) valerem para δ_1 e para δ_2 , portanto também valem para $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, r\}$ (um δ potencialmente menor ou igual a qualquer um dos δ_1 ou δ_2). É de se esperar que se vale para um δ grande, valerá para um δ pequeno, certo? Quero dizer, se você já garantiu que vale em todo um intervalo grande, restringir esse intervalo para um menor (centrado no mesmo ponto) não muda a implicação. Portanto, concluímos que

$$0 < |x - p| < \delta \implies L - \epsilon < g(x) < L + \epsilon$$

o que significa, pela definição, que

$$\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$$

□



Também conhecido como teorema do sanduíche, pois está efetivamente “sanduichando” a função do meio a partir das funções que a limitam por cima e por baixo. Particularmente útil para calcular uma série de limites complicados, mas que são simplificados quando encurralamos a função entre duas funções que possuem limites simples. A seguir, gostaria de mostrar para você alguns limites particularmente úteis e importantes no cálculo.

ANIMAÇÃO: TEOREMA DO CONFRONTO

Escaneie o QR code para assistir a animação sobre o teorema do confronto e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!

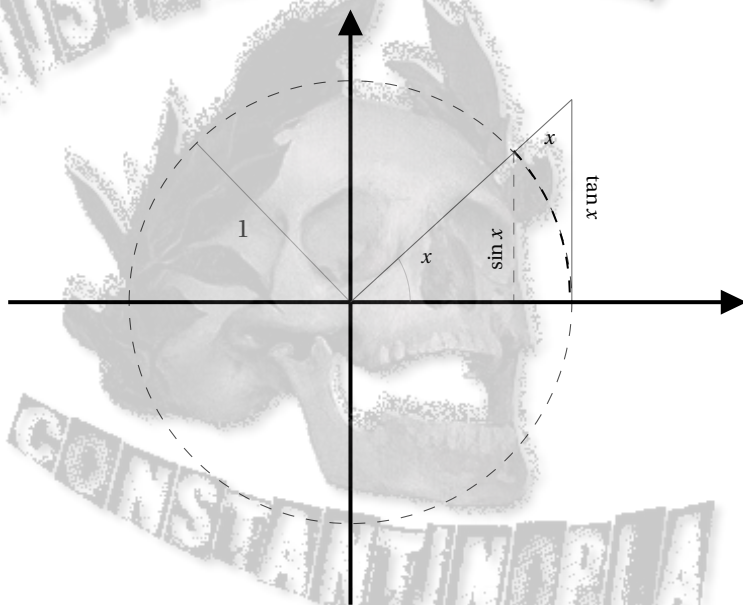


LIMITES TRIGONÔMÉTRICOS FUNDAMENTAIS

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{t \rightarrow \infty} t \sin\left(\frac{1}{t}\right) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0$$

O que envolve o seno pode ser demonstrado (*faça!*) pelo teorema do confronto, encurralando x entre $\sin x$ inferiormente e $\tan x$ superiormente (interprete geometricamente, veja a figura que forneço a seguir), dividindo todos os lados da desigualdade por $\sin x$ e depois invertendo-a, enquanto que o do cosseno pode ser demonstrado a partir do limite fundamental do seno.



NÚMERO DE EULER

O número e , conhecido como número de Euler, é **definido** pelo limite

$$e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Mais geralmente, podemos mostrar a partir disso que a função exponencial e^x pode ser definida pelo limite

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

onde e é a base da função logarítmica natural e é aproximadamente igual a 2,71828.

Antes de você partir para os exercícios, gostaria de compilar aqui uma série de informações úteis, fórmulas e identidades que você pode vir a usar na resolução das questões. Use como uma fonte de consulta. Caso queira estudar esses assuntos, que compreendem o pré-cálculo, você pode usar a minha apostila gratuita de fundamentos matemáticos — basta me procurar no Instagram (@vhslins).

TRIGONOMETRIA

- Funções Recíprocas

$$\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\csc(x) = \frac{1}{\sin(x)}$$

$$\sec(x) = \frac{1}{\cos(x)}$$

- Identidades Pitagóricas

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$1 + \tan^2(x) = \sec^2(x)$$

$$1 + \cot^2(x) = \csc^2(x)$$

- Identidades de soma e diferença de arcos

$$\sin(x \pm y) = \sin(x)\cos(y) \pm \cos(x)\sin(y)$$

$$\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp \sin(x)\sin(y)$$

$$\tan(x \pm y) = \frac{\tan(x) \pm \tan(y)}{1 \mp \tan(x)\tan(y)}$$

- Identidades de arco duplo

$$\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)$$

$$\tan(2x) = \frac{2 \tan(x)}{1 - \tan^2(x)}$$

- Identidades de arco metade

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{2}}$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos(x)}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{x}{2}\right) = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos(x)}{1 + \cos(x)}}$$

- Fórmulas de Prostaferese

$$\sin(x) + \sin(y) = 2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\sin(x) - \sin(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) + \cos(y) = 2 \cos\left(\frac{x+y}{2}\right) \cos\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

$$\cos(x) - \cos(y) = -2 \sin\left(\frac{x+y}{2}\right) \sin\left(\frac{x-y}{2}\right)$$

- Funções Trigonométricas Hiperbólicas

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$$

FATORAÇÃO E PRODUTOS NOTÁVEIS

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$$

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

$$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$$

$$ax + bx + ay + by = (a + b)x + (a + b)y = (a + b)(x + y)$$

1.7 ■ Exercícios de limites**Questão 1. Cálculo das Funções de uma Variável - G. Ávila (2003)**

Encontre o limite a seguir, se existir.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$$

Questão 2. Instituto de Matemática e Estatística - USP (2010)

Calcule, caso exista, o limite a seguir.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}}$$

Questão 3. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Ache

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x + 4}{\sqrt{2x^2 - 5}}$$

Questão 4. Instituto de Matemática e Estatística - USP (2010)

Encontre, caso exista, o limite abaixo.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan(3x) \csc(6x)$$

Questão 5. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Determine o limite a seguir, caso exista.

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\csc 3\theta}{\cot \theta}$$

Questão 6. Calculus - M. Spivak (2003)

Considere o limite a seguir:

$$L = \lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\tan^2 \psi + 2\psi}{\psi + \psi^2}$$

Determine o valor de L , caso o limite exista.

Questão 7. Cálculo das Funções de uma Variável - G. Ávila (2003)

Encontre o limite a seguir, se existir.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(3x + \sin x)}{2x^2 - 5x \sin x + 1}$$

Questão 8. Instituto de Física - USP (2021)

Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right) = -1$$

Questão 9. Instituto de Matemática e Estatística - USP (2010)

Considere o limite no infinito a seguir:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})$$

Determine o valor de L , caso o limite exista.

Questão 10. Instituto de Matemática e Estatística - USP (2010)

Calcule, caso exista, o limite a seguir.

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2 - 2x) \sin(x^2 - 4)}{\sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{4x}}$$

Questão 11. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Encontre o limite abaixo, se existir.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x^4 + 1} - \sqrt{x^2 + 1}}{x^2}$$

Questão 12. Instituto de Matemática e Estatística - USP (2010)

Encontre, caso exista, o limite no infinito abaixo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$$

Questão 13. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Considere o limite no infinito a seguir:

$$L = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x + 3}{x + \sqrt[3]{x}}$$

Determine o valor de L , caso o limite exista.

Questão 14. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Calcule, caso exista, o limite a seguir.

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{\sin x - \cos x}{1 - \tan x}$$

Questão 15. Problemas Seleccionados de Cálculo - V. H. S. Lins (2024)

Mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

Questão 16. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Encontre, caso exista, o limite abaixo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x[\ln(x+1) - \ln(x)]$$

Questão 17. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Determine o limite abaixo, caso exista.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \tanh(x)$$

onde $\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$ é a tangente hiperbólica.

Questão 18. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Calcule o limite seguinte, caso exista:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$$

Questão 19. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Encontre o limite abaixo, caso exista.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x}$$

Questão 20. Cálculo das Funções de uma Variável - G. Ávila (2003)

Determine o limite abaixo, caso exista, admitindo que a é uma constante real.

$$\lim_{n \rightarrow a} \frac{n^2 + (1-a)n - a}{n - a}$$

Questão 21. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Determine o limite a seguir, caso exista.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x}$$

Questão 22. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, mostre que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} \right] = 1$$

Questão 23. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Encontre, caso exista, o limite abaixo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[a^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$$

Questão 24. Instituto de Física - USP (2021)

Calcule, caso exista, o limite a seguir.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left[(\sqrt{x^2 + 1} - x) \sin \left(\frac{1}{x} \right) \right]$$

Este provavelmente é o mais difícil do capítulo. Tome cuidado com os sinais e atente-se às implicações de x estar tendendo a $-\infty$ em vez de $+\infty$. Lembre-se que $\sqrt{x^2} = |x|$.

Questão 25. Calculus - M. Spivak (2003)

Encontre o limite abaixo, caso exista.

$$\lim_{\psi \rightarrow 1} (\psi^2 - 1)^3 \sin\left(\frac{1}{\psi - 1}\right)^3$$

Atenção: quem está elevado ao cubo é o argumento do seno, não o seno em si.

Questão 26. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Usando o teorema do confronto, ache

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left[(k-1)^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k-1}} \right]$$

Questão 27. Instituto de Física - USP (2021)

Determine o limite, caso exista:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1+x^2}-1}{x}$$

Questão 28. Instituto de Física - USP (2021)

Encontre o limite abaixo, caso exista.

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left[\frac{\sqrt{n+1+n^2}-1}{\sqrt{n}} \cdot \sin \frac{1}{n} \right]$$

Questão 29. Calculus - M. Spivak (2003)

Encontre o limite abaixo, caso exista.

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\phi^2(1 + \sin^2 \phi)}{(\phi + \sin \phi)^2}$$

Questão 30. Instituto de Física - USP (2021)

Determine $n \in \mathbb{N}$ tal que o limite seguinte seja finito e não nulo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n x (\sqrt{1+x^2} - 1)}{x^3 + x^4}$$

Questão 31. Calculus - M. Spivak (2003)

Encontre a expressão para o perímetro $P(n)$ de um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio r , em função da quantidade de lados (n) do polígono. Após isso, calcule $\lim_{n \rightarrow \infty} P(n)$ e interprete geometricamente.

Questão 32. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1}$$

Questão 33. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^x$$

Questão 34. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Supondo $0 < a < 1$, mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a}{1-a}$$

Questão 35. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Seja $a > 0$, $a \neq 1$. Mostre que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln a$$

Derivadas

“A verdadeira matemática deve ser justificada como arte, se é que pode ser justificada de alguma forma.”

— G. H. HARDY

2.1 ■ Definição e propriedades da derivada

Derivadas são operações matemáticas que investigam como as funções mudam em torno de pontos específicos, representam taxas de variação. Elas são definidas a partir de um limite que descreve a inclinação (ou coeficiente angular) da reta tangente ao ponto em que se avalia a derivada. Vejamos a definição rigorosa:

Seja $f(x)$ uma função real. A derivada de f em um ponto x_0 do seu domínio, denotada por $f'(x_0)$ ou $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0}$, é definida como

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

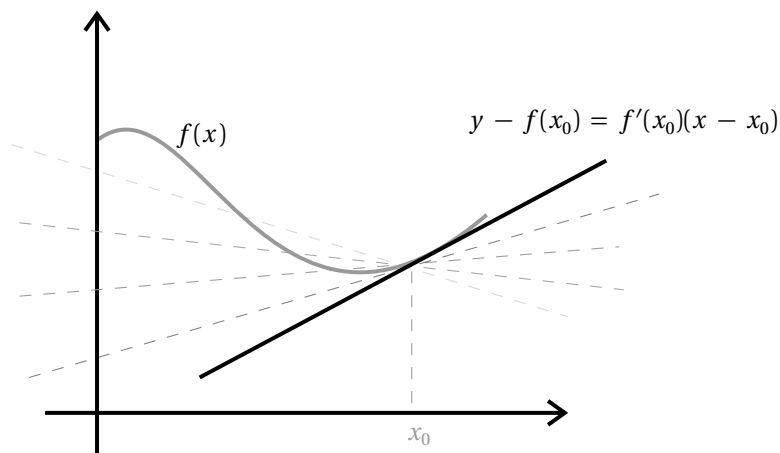
se este limite existir. Tomando $h = x - x_0$, torna-se equivalente escrever

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Questionar a existência desse limite é fundamental; se o limite não existir, dizemos que f não é diferenciável em x_0 . Observe que a expressão

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

descreve a *taxa de variação média* de f em um intervalo $[x_0, x]$ e é identicamente igual ao coeficiente angular da reta secante que passa pelos pontos $(x_0, f(x_0))$ e $(x, f(x))$. Ao tomarmos o limite $x \rightarrow x_0$, a reta secante vai se aproximando cada vez mais da reta tangente, até finalmente se transformar nesta. Nesse limite, dizemos que $f'(x_0)$ representa a *taxa de variação instantânea* de f . Pensando geometricamente, a inclinação da reta tangente ser positiva indica que a função está crescendo em torno do ponto x_0 e se for negativa indica que a função está decrescendo em torno deste ponto. Observe a figura a seguir para visualizar toda essa descrição.



A figura ilustra a equação de uma reta que passa pelo ponto $(x_0, f(x_0))$ com inclinação $f'(x_0)$ — que é a nossa reta tangente. Então, dada uma curva qualquer que é gráfico de função $y = f(x)$, já temos uma forma sistemática de obter a reta tangente a um ponto qualquer. Assim como os limites, as derivadas possuem propriedades e regras que simplificam a derivação de funções mais complexas. Apresento algumas das mais importantes em seguida.

PROPRIEDADES DAS DERIVADAS

Sejam f e g funções diferenciáveis e c uma constante. Então:

1. Derivada de uma constante é zero:

$$\frac{d}{dx} c = 0$$

2. Derivada da soma é a soma das derivadas:

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = f'(x) + g'(x)$$

3. Derivada do produto por uma constante:

$$\frac{d}{dx}[c f(x)] = c f'(x)$$

4. Regra do produto:

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

5. Regra do quociente:

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{f(x)}{g(x)} \right] = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}, \quad \text{se } g(x) \neq 0$$

6. Regra da cadeia para composição de funções:

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x))g'(x)$$

Demonstração. Analise cada item com calma.

1. Derivada de uma constante. Pela definição,

$$\frac{d}{dx} c = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{0}{h} = 0.$$

2. Derivada da soma. Pela definição,

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) + g(x+h)] - [f(x) + g(x)]}{h}.$$

Podemos reescrever como

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \right).$$

Usando a propriedade de limite da soma, temos:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) + g'(x).$$

3. Derivada do produto por uma constante. Pela definição,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}[cf(x)] &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{cf(x+h) - cf(x)}{h} = c \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= cf'(x). \end{aligned}$$

4. Regra do produto. Pela definição,

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h}.$$

Adicionamos e subtraímos $f(x+h)g(x)$:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x+h)g(x) + f(x+h)g(x) - f(x)g(x)}{h}.$$

Reorganizando, temos:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \left(f(x+h) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} + g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \right).$$

Distribuindo os limites, obtemos:

$$= f(x)g'(x) + f'(x)g(x).$$

5. Regra do quociente: Seja $q(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$, com $g(x) \neq 0$. Pela definição de derivada, temos:

$$q'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}.$$

Para simplificar essa expressão, colocamos os termos sobre um denominador comum:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}.$$

Em seguida, podemos reorganizar o numerador para separar os termos envolvendo $f(x+h)$ e $f(x)$:

$$= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x) - f(x)g(x) + f(x)g(x) - f(x)g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}.$$

Agora, agrupamos os termos:

$$\begin{aligned} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{[f(x+h) - f(x)]g(x) + f(x)[g(x) - g(x+h)]}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)}. \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \cdot \frac{g(x)}{g(x) \cdot g(x+h)} + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \cdot \frac{g(x) - g(x+h)}{h \cdot g(x) \cdot g(x+h)} \end{aligned}$$

Como $f(x)$ e $g(x)$ são diferenciáveis em x , isso simplifica para:

$$= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{[g(x)]^2}.$$

6. Regra da cadeia para composição de funções: Seja $F(x) = f(g(x))$. Queremos encontrar $F'(x)$. Pela definição de derivada, temos:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(g(x+h)) - f(g(x))}{h}.$$

Usamos a substituição $u = g(x+h) - g(x)$, de modo que $u \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow 0$. Podemos reescrever a expressão como

$$F'(x) = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(g(x) + u) - f(g(x))}{u} \cdot \frac{u}{h}$$

Note que $\frac{u}{h} = g'(x)$ quando $h \rightarrow 0$. Portanto, temos:

$$F'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Assim,

$$\frac{d}{dx} f(g(x)) = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

□

Essas regras, aliadas a definição de derivada, nos permitem encontrar a derivada das principais funções elementares. Todas elas são demons-

tradas em livros-texto quaisquer de cálculo e não costumam ser muito difíceis de demonstrar, basta aplicar a definição e fazer alguma manipulação algébrica conveniente, como fizemos para demonstrar as propriedades da derivada. Aqui, irei elencar cada uma delas para que você possa consultar e referenciar durante a resolução dos exercícios.

DERIVADAS DE FUNÇÕES ELEMENTARES

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^n) &= nx^{n-1}, & \frac{d}{dx}(\sqrt{x}) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) &= -\frac{1}{x^2}, & \frac{d}{dx}(\ln x) &= \frac{1}{x} \\ \frac{d}{dx}(e^x) &= e^x, & \frac{d}{dx}(a^x) &= a^x \ln a\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(\sin x) &= \cos x, & \frac{d}{dx}(\cos x) &= -\sin x \\ \frac{d}{dx}(\tan x) &= \sec^2 x, & \frac{d}{dx}(\cot x) &= -\csc^2 x \\ \frac{d}{dx}(\sec x) &= \sec x \tan x, & \frac{d}{dx}(\csc x) &= -\csc x \cot x \\ \frac{d}{dx}(\sinh x) &= \cosh x, & \frac{d}{dx}(\cosh x) &= \sinh x \\ \frac{d}{dx}(\tanh x) &= \operatorname{sech}^2 x \\ \frac{d}{dx}(\arcsin x) &= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, & \frac{d}{dx}(\arccos x) &= -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ \frac{d}{dx}(\arctan x) &= \frac{1}{1+x^2}\end{aligned}$$

2.2 ■ Pontos críticos

Um ponto x_0 no domínio de uma função diferenciável f é chamado de **ponto crítico** se $f'(x_0) = 0$ ou se $f'(x_0)$ não existe. Intuitivamente, esses são os pontos onde a função muda sua tendência de crescimento ou decrescimento, ou tem um comportamento especial, como atingir um ponto alto (máximo local) ou um ponto baixo (mínimo local) em relação aos pontos vizinhos. A esses máximos e mínimos locais nos referimos simplesmente por “extremos locais”. Os pontos críticos são candidatos naturais a serem pontos de máximo ou mínimo local, mas nem todo ponto crítico é necessariamente um extremo — para concluir isso, precisamos de mais informações, como explico a seguir.

EXTREMOS LOCAIS

Seja $f(x)$ uma função definida em um intervalo que contém x_0 . Dizemos que:

- $f(x_0)$ é um **máximo local** se existe um intervalo aberto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que

$$f(x_0) \geq f(x) \quad \text{para todo } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

- $f(x_0)$ é um **mínimo local** se existe um intervalo aberto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que

$$f(x_0) \leq f(x) \quad \text{para todo } x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta).$$

Graficamente, máximos locais correspondem a “picos” da função, enquanto mínimos locais representam “vales”.

TEOREMA DA DERIVADA NULA EM EXTREMOS LOCAIS

Seja $f(x)$ uma função diferenciável em um ponto x_0 . Se $f(x)$ possui um máximo ou mínimo local em x_0 , então:

$$f'(x_0) = 0.$$

Demonstração. Suponha que $f(x)$ possui um máximo local em x_0 . Então, existe um intervalo aberto $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tal que $f(x_0) \geq f(x)$ para todo $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$. Tomando $h > 0$ suficientemente

pequeno, temos:

$$f(x_0) \geq f(x_0 + h) \Rightarrow \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \leq 0.$$

Similarmente, tomando $h < 0$ suficientemente pequeno, obtemos

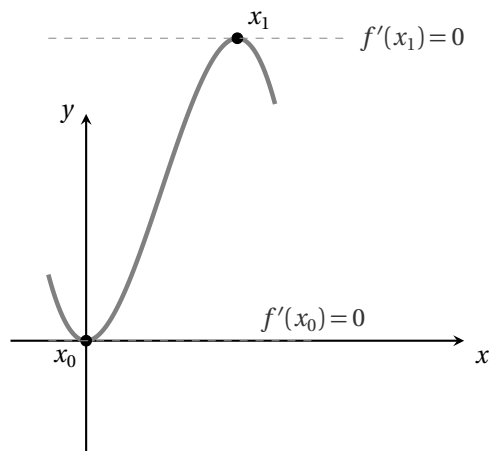
$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \geq 0.$$

Como o limite da taxa de variação deve ser único (dada a diferenciabilidade), concluímos que

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = 0.$$

O análogo pode ser argumentado para mínimo local em x_0 . □

Esse teorema nos diz que, em pontos onde $f(x)$ atinge um máximo ou mínimo local e é diferenciável, a derivada de f nesse ponto deve ser zero. Geometricamente faz sentido, porque num ponto como este a reta tangente ao gráfico é horizontal (tem inclinação nula).



Portanto, os pontos de máximo e mínimo locais de uma função diferenciável pertencem sempre ao conjunto dos seus pontos críticos. O teste da derivada segunda (que geometricamente mede a concavidade do gráfico) fornece uma maneira prática de determinar se um ponto crítico é um máximo local, um mínimo local ou nenhum dos dois.

TESTE DA DERIVADA SEGUNDA

Seja $f(x)$ uma função diferenciável duas vezes em um ponto crítico x_0 de f , ou seja, $f'(x_0) = 0$. Então:

- Se $f''(x_0) > 0$, então $f(x)$ possui um mínimo local em x_0 .
- Se $f''(x_0) < 0$, então $f(x)$ possui um máximo local em x_0 .
- Se $f''(x_0) = 0$, o teste é inconclusivo; x_0 pode ser um ponto de inflexão, e é necessário um exame adicional, estudando a derivada primeira e o valor da função em pontos vizinhos.

EXEMPLO 3

Vamos aplicar o teste da derivada segunda para encontrar os extremos locais da função $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Primeiramente, derivamos $f(x)$:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x.$$

Para encontrar os pontos críticos, resolvemos $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 6x = 0 \Rightarrow x(3x - 6) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ou } x = 2.$$

Agora, aplicamos a derivada segunda para esses pontos:

$$f''(x) = 6x - 6.$$

Avaliando $f''(x)$ nos pontos críticos:

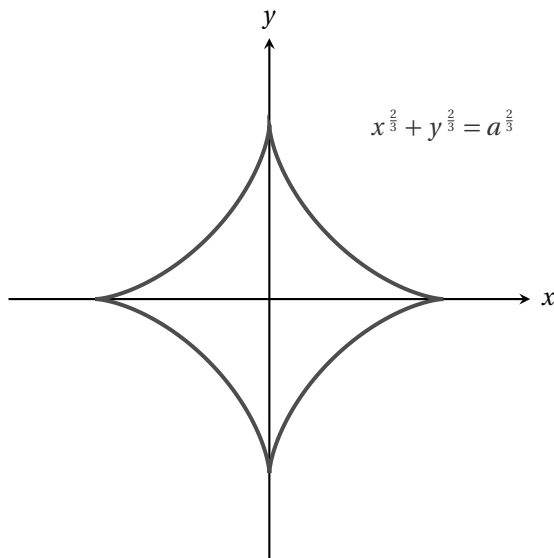
- $f''(0) = 6(0) - 6 = -6 \Rightarrow$ máximo local em $x = 0$.
- $f''(2) = 6(2) - 6 = 6 \Rightarrow$ mínimo local em $x = 2$.

Portanto, $x = 0$ é um ponto de máximo local e $x = 2$ é um ponto de mínimo local.

2.3 ■ Derivação Implícita

Em alguns casos trabalharemos por curvas dadas na forma implícita: $f(x, y) = 0$, situações nas quais precisaremos realizar a chamada *derivação implí-*

cita. Por exemplo, a equação $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ define implicitamente uma curva chamada *astróide*.



Quando estivermos lidando com curvas descritas implicitamente por equações do tipo $f(x, y) = 0$ e quisermos derivar, realizamos a chamada derivação implícita. Para isso, usamos a regra da cadeia para a composição de funções. Vejamos na prática o que ocorre quando tentamos derivar a equação do astróide:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} \right] &= \frac{d}{dx} \left[a^{\frac{2}{3}} \right] = 0 \\ \Rightarrow \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}} + \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}} \frac{dy}{dx} &= 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\sqrt[3]{\frac{y}{x}} \end{aligned}$$

Como $y = f(x)$ mas ele também está elevado a uma potência racional, aplicamos a regra da cadeia porque isso é uma composição de funções (função potência e função $f(x)$). É daí que surge o termo $\frac{dy}{dx}$ no meio da expressão — ao derivar a função de “dentro” da nossa composição. Note que a expressão que encontramos para a derivada não é explícita em termos de x , mas escrita também em termos de y . Durante os problemas, você pode tentar isolar y em $f(x, y) = 0$, dividindo em casos se necessário, para poder desenvolver o que quer que seja na sua resolução. Tudo isso ficará mais claro quando você arregaçar as mangas para resolver as questões.

A derivada também é extensivamente utilizada na física. Um exemplo elementar é a representação da velocidade, aceleração, e outras taxas de mudança. Por exemplo, se $s(t)$ descreve a posição de um objeto em função do tempo t , então sua velocidade é a derivada de s em relação a t , ou $s'(t)$, e a aceleração é a derivada da velocidade, ou $s''(t)$.

2.4 ■ Teoremas de Weierstrass, Rolle, Cauchy e L'Hôpital

TEOREMA DE WEIERSTRASS

Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$. Então $f(x)$ atinge um valor máximo e um valor mínimo em $[a, b]$. Em outras palavras, existem pontos $x_{\min}, x_{\max} \in [a, b]$ tais que

$$f(x_{\min}) \leq f(x) \leq f(x_{\max})$$

para todo $x \in [a, b]$.

Demonstração. Como $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, sua imagem $f([a, b])$ é um conjunto fechado e limitado (pela propriedade de que a imagem de um intervalo fechado sob uma função contínua também é fechada e limitada). Como $f([a, b])$ é um conjunto fechado e limitado de números reais, ele contém seu supremo e seu ínfimo. Seja $M = \sup f([a, b])$ e $m = \inf f([a, b])$. Pela definição de supremo e ínfimo, existe pelo menos um ponto $x_{\max} \in [a, b]$ tal que $f(x_{\max}) = M$ e pelo menos um ponto $x_{\min} \in [a, b]$ tal que $f(x_{\min}) = m$. Portanto, $f(x)$ atinge um valor máximo e um valor mínimo em $[a, b]$, conforme enunciado. $\square$

TEOREMA DE ROLLE

Seja $f(x)$ uma função contínua em um intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Se $f(a) = f(b)$, então existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = 0.$$

Demonstração. Pelo Teorema de Weierstrass, a função atinge um valor máximo e um valor mínimo em $[a, b]$. Existem três possíveis casos para o comportamento da função:

- Caso 1: se f é constante em $[a, b]$, então $f'(x) = 0$ para todo $x \in (a, b)$, e o teorema é satisfeito.
- Caso 2: se f não é constante e atinge seu máximo em algum ponto $c \in (a, b)$, então $f'(c) = 0$ porque c é um ponto crítico (pela condição de derivada nula em um máximo local).
- Caso 3: se f não é constante e atinge seu mínimo em algum ponto $c \in (a, b)$, então $f'(c) = 0$ porque c é um ponto crítico (pela condição de derivada nula em um mínimo local).

Em todos os casos, existe um ponto $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$, conforme enunciado. $\square$

TEOREMA DO VALOR MÉDIO (TVM)

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciável no intervalo aberto (a, b) . Então, existe pelo menos um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Definimos a função auxiliar

$$h(x) = f(x) - \left(\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right) (x - a).$$

Essa função representa $f(x)$ menos a linha reta que conecta os pontos $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, com inclinação $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$. Observe que

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (a - a) = f(a)$$

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \cdot (b - a) = f(b) - (f(b) - f(a)) = f(a)$$

Assim, temos $h(a) = h(b)$. Como $h(x)$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , podemos aplicar o Teorema de Rolle, que garante a existência de um ponto $c \in (a, b)$ tal que

$$h'(c) = 0.$$

Calculando $h'(x)$, obtemos

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Como $h'(c) = 0$, temos que

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a},$$

o que conclui a demonstração. $\square$

TEOREMA DE CAUCHY PARA O VALOR MÉDIO

Suponha que $f(x)$ e $g(x)$ sejam funções contínuas no intervalo fechado $[a, b]$ e diferenciáveis no intervalo aberto (a, b) . Suponha ainda que $g'(x) \neq 0$ em (a, b) . Então, existe pelo menos um valor $c \in (a, b)$ tal que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

Demonstração. Primeiro, notamos que $g(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema do Valor Médio padrão no intervalo $[a, b]$. Portanto, existe $r \in (a, b)$ tal que

$$g'(r) = \frac{g(b) - g(a)}{b - a}.$$

Pela suposição, $g'(r) \neq 0$, o que implica que $g(b) - g(a) \neq 0$. Agora, assim como na prova do Teorema do Valor Médio padrão, construímos uma nova função $h(x)$ para aplicar o Teorema de Rolle. Definimos

$$h(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(x).$$

Como $g(b) - g(a) \neq 0$, não estamos dividindo por zero. Além disso, $h(x)$ é contínua em $[a, b]$ e diferenciável em (a, b) , pois $f(x)$ e $g(x)$ possuem essas propriedades. Calculando $h(a)$ e $h(b)$, obtemos

$$h(a) = f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(a)$$

e

$$h(b) = f(b) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g(b).$$

Simplificando ambas as expressões, vemos que $h(a) = h(b)$. Assim, $h(x)$ satisfaz as hipóteses do Teorema de Rolle, e existe $c \in (a, b)$ tal que

$$h'(c) = 0.$$

Calculando $h'(x)$, obtemos

$$h'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Como $h'(c) = 0$, temos

$$f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0,$$

o que implica que

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

□

REGRA DE L'HÔPITAL

Seja $f(x)$ e $g(x)$ funções diferenciáveis em um intervalo real aberto I contendo a , exceto possivelmente no próprio a , e suponha que $g'(x) \neq 0$ em I para $x \neq a$. Se

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \quad \text{ou} \quad \lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty,$$

então

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

desde que o limite do lado direito exista ou seja $\pm\infty$.

Demonstração. Provamos aqui o caso em que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$. Nesse caso, como $f(x) \rightarrow 0$ e $g(x) \rightarrow 0$ conforme $x \rightarrow a$, aplicamos o Teorema de Cauchy para o Valor Médio no intervalo $[a, x]$ para cada x próximo de a (com $x \neq a$). Pelo teorema, existe um ponto $c \in (a, x)$ tal que

$$\frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Como $f(a) = g(a) = 0$, essa expressão se simplifica para

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Assim, a razão $\frac{f(x)}{g(x)}$ é expressa em termos das derivadas de f e g em um ponto intermediário c , que se aproxima de a conforme $x \rightarrow a$. Quando $x \rightarrow a$, também temos $c \rightarrow a$, de modo que

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

desde que o limite do lado direito exista ou seja $\pm\infty$. □

A regra de L'Hôpital ajuda muito a calcular limites em que aparecem indeterminações do tipo $0/0$ ou ∞/∞ . Depois que você já se debruçou e aprendeu a resolver os mais variados limites por manipulações e construções, se tornando mais inteligente nesse processo, agora é equipado com essa ferramenta para quando precisar resolver de forma rápida tais limites.

EXEMPLO 4

Vamos calcular o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x}.$$

Quando tentamos calcular diretamente, obtemos uma forma indeterminada do tipo $\frac{0}{0}$, pois

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin(x) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{x \rightarrow 0} x = 0.$$

Como estamos diante de uma indeterminação $\frac{0}{0}$, podemos aplicar a Regra de L'Hôpital. Derivamos o numerador e o denominador:

$$f(x) = \sin(x) \Rightarrow f'(x) = \cos(x),$$

$$g(x) = x \Rightarrow g'(x) = 1.$$

Aplicando a Regra de L'Hôpital, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1}.$$

Agora, podemos calcular o limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{1} = \cos(0) = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

ANIMAÇÃO: REGRA DE L'HÔPITAL

Escaneie o QR code para assistir a animação sobre a regra de L'Hôpital e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!



2.5 ■ Diferencial e taxas relacionadas

Introduzimos agora o conceito de *diferencial*, que servirá para trabalhar com problemas relacionados a aproximações.

DIFERENCIAL

Dada uma função $y = f(x)$, diferenciável em x , definimos o diferencial de y , denotado por dy , como

$$dy = f'(x)dx = \frac{df}{dx} dx$$

que representa a variação em y decorrente da variação infinitesimal em x , indicada pelo dx , e fornece a melhor *aproximação linear* para a variação de $f(x)$ perto de x .

Uma aplicação imediata do diferencial é na aproximação linear de funções, que é extremamente útil em cálculos numéricos e estimações. Quando temos uma função $y = f(x)$ e queremos estimar o valor de f em um ponto próximo a x , podemos usar a linearização da função, que é simplesmente a função do primeiro grau que melhor aproxima f perto de x . Matematicamente, se δx é uma pequena mudança em x , a mudança correspondente em y , denotada δy , pode ser aproximada por dy .

EXEMPLO 5

Considere a função $f(x) = \sqrt{x}$ e suponha que desejamos encontrar uma aproximação para $\sqrt{4,01}$. Tomando $x = 4$ e $\delta x = 0,01$, podemos calcular δy como:

$$\delta y \approx dy = f'(x)dx \approx \frac{1}{2\sqrt{x}} \delta x$$

Ao substituir $x = 4$ e $\delta x = 0,01$, obtemos uma boa aproximação para δy , que nos dá uma estimativa para $\sqrt{4,01}$ sem a necessidade de cálculo exato. Note que $y = \sqrt{4} = 2$ é conhecido, de forma que $\sqrt{4,01} \approx 2,00249843945$ é aproximado como $y + \delta y = 2,0025$.

Além disso, em muitos problemas de cálculo estamos interessados em saber como a taxa de variação de uma quantidade está relacionada à taxa de variação de outra. Esse tipo de problema é conhecido pelo nome *taxas relacionadas*, onde as taxas de variação de diferentes variáveis estão conectadas por meio de uma relação comum.

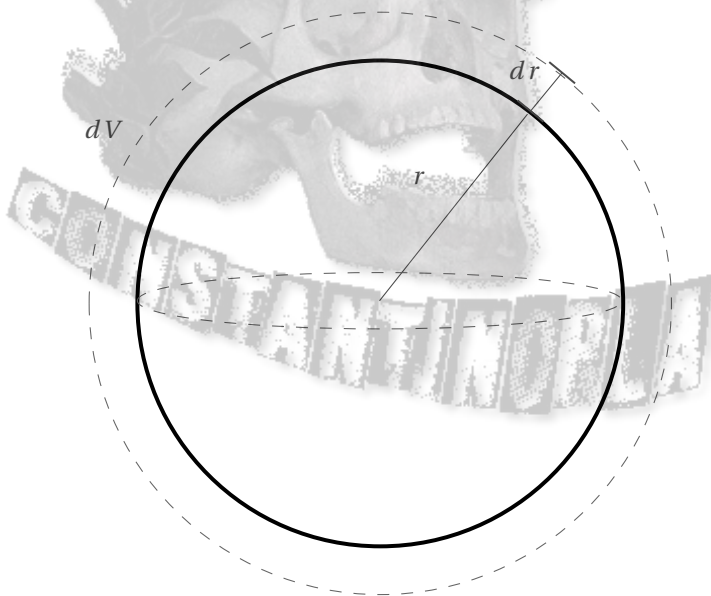
EXEMPLO 6

Um caso clássico de taxas relacionadas é o problema do balão. Suponha que um balão esférico esteja sendo inflado de modo que seu volume aumente a uma taxa constante. Estamos interessados em saber como a taxa de aumento do raio do balão está relacionada a essa taxa de variação do volume. Dado que o volume V de uma esfera é $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, podemos relacionar as taxas de variação de V e r derivando:

$$\frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

Se $\frac{dV}{dt}$ é conhecido, podemos encontrar $\frac{dr}{dt}$ por meio da relação acima, onde t representa o tempo. Não só isso, também podemos enxergar a relação encontrada como uma maneira de representar quanto uma variação infinitesimal no raio da esfera influencia no volume da mesma, a partir dos diferenciais (veja a figura a seguir):

$$dV = 4\pi r^2 dr$$



ANIMAÇÃO: TAXAS RELACIONADAS - PROBLEMA DO BALÃO

Escaneie o QR code para assistir a animação sobre taxas relacionadas no problema do balão e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!


EXEMPLO 7

Considere um cone de altura fixa 12 cm e um raio da base de 4 cm sendo preenchido com água. Estamos interessados em saber a taxa de variação da altura h da água no cone em função do tempo, à medida que o volume de água aumenta a uma taxa constante de $\frac{dV}{dt} = 2 \text{ cm}^3/\text{s}$. A fórmula para o volume V de um cone é

$$V = \frac{1}{3} \pi r^2 h,$$

onde r é o raio da superfície da água e h é a altura da água no cone. Como o cone mantém uma proporção constante entre r e h (uma vez que a altura e o raio da base do cone completo são fixos), temos a relação

$$\frac{r}{h} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3} \Rightarrow r = \frac{h}{3}.$$

Substituímos $r = \frac{h}{3}$ na fórmula do volume:

$$V = \frac{1}{3} \pi \left(\frac{h}{3} \right)^2 h = \frac{1}{3} \pi \frac{h^2}{9} h = \frac{\pi}{27} h^3.$$

Derivando ambos os lados da equação em relação ao tempo t , obtemos:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{27} \cdot 3h^2 \frac{dh}{dt} = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Sabemos que $\frac{dV}{dt} = 2 \text{ cm}^3/\text{s}$, então substituímos para encontrar $\frac{dh}{dt}$:

$$2 = \frac{\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}.$$

Isolando $\frac{dh}{dt}$, temos:

$$\frac{dh}{dt} = \frac{2 \cdot 9}{\pi h^2} = \frac{18}{\pi h^2}.$$

Portanto, a taxa de variação da altura da água h em função do tempo é dada por

$$\frac{dh}{dt} = \frac{18}{\pi h^2}.$$

Esse resultado indica que, conforme o nível de água sobe no cone, a taxa de variação da altura h diminui, pois depende inversamente do quadrado de h . Intuitivamente faz sentido, porque no início o nível sobe rapidamente (região perto do cume do cone, não há muito espaço para a água ficar), enquanto que no final é preciso preencher um grande espaço para elevar alguma unidade de altura.

2.6 ■ Séries de Taylor e Maclaurin

A série de Taylor é uma forma extremamente poderosa para aproximar funções por polinômios. Ela é especialmente útil para calcular aproximações e resolver problemas que, de outra forma, seriam intratáveis.

SÉRIE DE TAYLOR

Seja $f(x)$ uma função infinitamente diferenciável em torno de $x = a$ (no sentido de podermos derivar infinitas vezes). A série de Taylor de $f(x)$ em torno de $x = a$ é:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots$$

ou, de forma mais compacta, na notação somatório:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n,$$

onde $f^{(n)}(a)$ denota a n -ésima derivada de f avaliada em $x = a$.

Essa série permite expressar $f(x)$ como uma soma infinita de termos polinomiais, onde cada termo é proporcional a uma derivada de f em a . A utilidade da série de Taylor é que, em muitos casos, truncar a série após alguns termos (geralmente até o primeiro ou segundo) proporciona uma boa aproximação para $f(x)$, especialmente quando x está próximo de a .

EXEMPLO 8

Queremos encontrar a série de Taylor para $f(x) = e^{-x^2}$ em torno de $x = 0$ até o termo de quarta ordem. Esta função é comum em física para modelar distribuições Gaussianas, e sua expansão em série pode ser usada para aproximar valores próximos a $x = 0$. Primeiro, calculamos as derivadas de $f(x)$ e avaliamos em $x = 0$:

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{-x^2}, & f(0) &= 1, \\f'(x) &= -2xe^{-x^2}, & f'(0) &= 0, \\f''(x) &= (4x^2 - 2)e^{-x^2}, & f''(0) &= -2, \\f'''(x) &= (-8x^3 + 12x)e^{-x^2}, & f'''(0) &= 0, \\f^{(4)}(x) &= (16x^4 - 48x^2 + 12)e^{-x^2}, & f^{(4)}(0) &= 12.\end{aligned}$$

Assim, a série de Taylor de $f(x)$ em torno de $x = 0$ até o termo de quarta ordem é dada por:

$$f(x) \approx f(0) + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}x^4.$$

Substituindo os valores das derivadas, obtemos:

$$e^{-x^2} \approx 1 - \frac{x^2}{1} + \frac{12}{24}x^4 = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

Portanto, uma aproximação para e^{-x^2} em torno de $x = 0$ é:

$$e^{-x^2} \approx 1 - x^2 + \frac{x^4}{2}.$$

A série de Maclaurin é um caso especial da série de Taylor em que o ponto a é zero. Em outras palavras, é a série de Taylor de $f(x)$ em torno de $x = 0$.

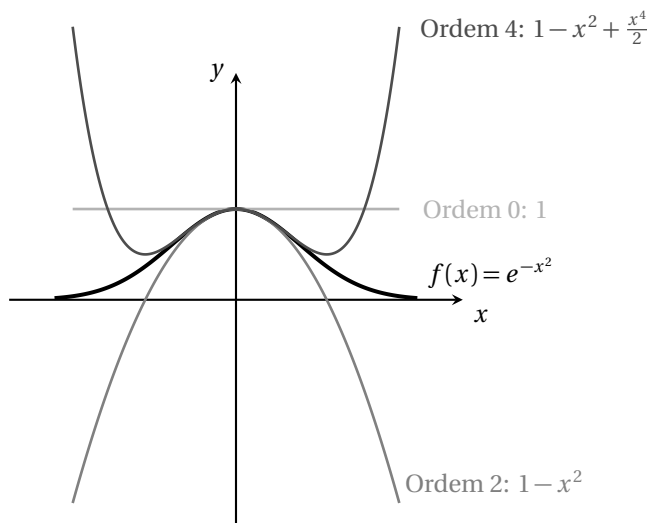
SÉRIE DE MACLAURIN

Seja $f(x)$ uma função infinitamente diferenciável em torno de $x = 0$. A série de Maclaurin de $f(x)$ é:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots$$

ou, de forma mais compacta:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$



Essas séries permitem calcular aproximações de funções elementares, como a exponencial, o seno, o cosseno e o logaritmo natural. Elas têm muitas aplicações, por exemplo na resolução de equações diferenciais ordinárias (equações em que aparecem derivadas) via séries de potências e a modelagem de sistemas físicos. A seguir, listo para você algumas das séries de Maclaurin mais comuns e úteis, que você encontrará frequentemente na matemática e também na física. Todas elas são determinadas aplicando a definição de série de Taylor para cada função dada.

SÉRIES DE MACLAURIN COMUNS

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

$$\sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$$

$$\cos(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots, \quad |x| < 1$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots, \quad |x| < 1$$

Note que, em alguns casos, como na série de $\ln(1+x)$ e $\frac{1}{1-x}$, a série só converge para valores de x em um intervalo específico. Para que uma série de Taylor represente uma função $f(x)$ exatamente, é necessário que a série *converja* para $f(x)$ no intervalo de interesse. Em outras palavras, a soma infinita dos termos da série deve se aproximar de $f(x)$ conforme o número de termos aumenta. Nem toda função possui uma série de Taylor convergente para todo x mas, para aquelas que possuem, a série fornece uma maneira eficiente de calcular valores de $f(x)$ usando apenas operações polinomiais. A convergência de séries é estudada em disciplinas mais avançadas de cálculo, mas você já está apto a usar essas que estudamos.

Quando utilizamos uma série de Taylor ou Maclaurin para aproximar uma função truncando-a em um número finito de termos, estamos introduzindo um erro, chamado de *erro de truncamento*. Esse erro é dado pelo resto de Lagrange da série de Taylor, que estima o quanto a aproximação se desvia da função original.

RESTO DE LAGRANGE

Se $f(x)$ é $n+1$ vezes diferenciável em um intervalo contendo a e x e c é algum ponto entre a e x , então o erro $R_n(x)$ ao aproximar

$f(x)$ pela série de Taylor truncada até o termo n -ésimo é dado por:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

Esse termo de erro nos dá uma noção de quão precisa é a aproximação e é especialmente útil para calcular quantos termos são necessários para obter uma precisão desejada.

2.7 ■ Exercícios de derivada

Questão 36. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Dadas $f(u) = u^2 + 5u + 5$ e $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$, ache a derivada de $f \circ g$ de duas maneiras: (i) encontrando primeiro $(f \circ g)(x)$ e então calculando $(f \circ g)'(x)$; (ii) usando a regra da cadeia.

Questão 37. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Seja f a função definida a seguir:

$$f(x) = \frac{x+1}{x \ln x}$$

obtenha $f'(x)$.

Questão 38. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Calcule $\phi'(t)$, sendo $\phi(t)$ definida por

$$\phi(t) = \ln(\sqrt{1+e^t} - 1) - \ln(\sqrt{1+e^t} + 1)$$

Questão 39. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Obtenha a derivada da função abaixo.

$$h(x) = a^{\tan(nx)}$$

onde $n \in \mathbb{R}$.

Questão 40. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Considere a função $f(x) = \ln x$. Encontre a expressão geral para $f^{(n)}(x)$ em função de n e x , que por sua vez representa a n -ésima derivada de f , sendo $n \in \mathbb{N}$.

Questão 41. Calculus - M. Spivak (2003)

Se $S_n(x) = x^n$ e $0 \leq k \leq n$, mostre que

$$S_n^{(k)}(x) = k! \binom{n}{k} x^{n-k}$$

onde $\binom{n}{k} \equiv \frac{n!}{k!(n-k)!}$ é o binomial da análise combinatória.

Questão 42. Calculus - M. Spivak (2003)

Suponha que $f^{(n)}(a)$ e $g^{(n)}(a)$ existam. Prove a *fórmula de Leibniz*:

$$(f \cdot g)^{(n)}(a) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(a) \cdot g^{(n-k)}(a)$$

Questão 43. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Se $y = e^x \cos x$, verifique que

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Questão 44. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Sabendo que $\psi(t) = \frac{te^{2t}}{\ln(3t+1)}$, obtenha $\psi''(t)$.

Questão 45. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovich (1987)

Seja g a função definida a seguir:

$$g(x) = \ln \left[\frac{1 + \sqrt{\sin x}}{1 - \sqrt{\sin x}} \right] + 2 \arctan(\sqrt{\sin x})$$

obtenha $g'(x)$.

Questão 46. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine a equação da reta tangente à elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

no ponto (x_0, y_0) , $y_0 \neq 0$.

Questão 47. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Em que ponto da curva $y^2 = 2x^3$ a tangente é perpendicular à reta $4x - 3y + 2 = 0$?

Questão 48. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Encontre, caso existam, as equações das retas tangentes à hipérbole $4x^2 - 9y^2 = 36$ que sejam perpendiculares à reta $2y + 5x = 10$.

Questão 49. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Ache uma equação da reta tangente à curva $\sqrt[3]{xy} = 14x + y$ no ponto $(2, -32)$.

Questão 50. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine uma reta paralela a $x + y = 1$ e tangente à curva $y^3 + xy + x^3 = 0$ em um ponto (x_0, y_0) , com $x_0 < 0$ e $y_0 < 0$.

Questão 51. Instituto de Física - USP (2015)

Mostre que qualquer par de retas tangentes à parábola $y = ax^2$, ($a \neq 0$) tem como interseção um ponto que está numa reta vertical que passa pelo ponto médio do segmento que une os pontos de tangência destas retas.

Questão 52. Instituto de Matemática e Estatística - USP (2019)

Seja $y = f(x)$ uma função derivável dada implicitamente pela equação

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{25}{3}(y^2 - x^2).$$

Mostre que a reta tangente ao gráfico de f no ponto $(-1, 2)$ é paralela à reta de equação $11x - 2y + 3 = 0$.

Questão 53. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Um ponto P move-se sobre a parábola $y = 3x^2 - 2x$. Suponha que as coordenadas $x(t)$ e $y(t)$ de P são deriváveis e que $\frac{dx}{dt} \neq 0$. Pergunta-se: em que ponto da parábola a velocidade da ordenada y de P é o triplo da velocidade da abscissa x de P ?

Questão 54. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Determine a equação da tangente e da normal no ponto $P(2, 2)$ à curva $\Gamma(t)$ parametrizada por:

$$\begin{cases} x = \frac{1+t}{t^3} \\ y = \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} \end{cases}$$

onde $t \in \mathbb{R}^*$.

Questão 55. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Considere a função $\psi(u, v)$ dada em forma paramétrica:

$$u = 2 \ln(\cot(s)), \quad v = \tan(s) + \cot(s)$$

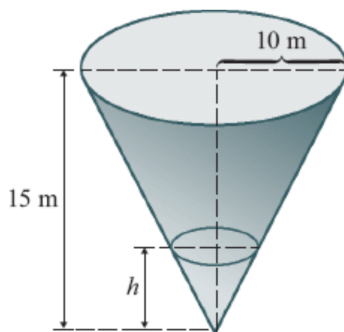
e mostre que $\frac{du}{dv} = \tan(2s)$.

Questão 56. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Numa determinada vila, a taxa segundo a qual um boato se espalha é conjuntamente proporcional ao número de pessoas que ouviram o boato e ao número de pessoas que não ouviram. Mostre que o boato está sendo espalhado com velocidade máxima, quando a metade da população da cidade já o escutou.

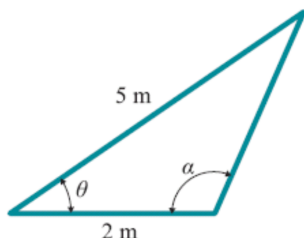
Questão 57. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Enche-se um reservatório, cuja forma é a de um cone circular reto, de água a uma taxa de $0,1 \text{ m}^3/\text{s}$. O vértice está a 15 m do topo e o raio é de 10 m . Com que velocidade o nível h da água está subindo no instante em que $h = 5 \text{ m}$?



Questão 58. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Num determinado instante, $\theta = \pi/3$ e está variando, neste instante, a uma taxa de 0,01 radiano por segundo veja a figura abaixo). A que taxa estará variando o ângulo α neste mesmo instante?

**Questão 59. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)**

Um ponto move-se sobre a espiral de Arquimedes:

$$r = a\varphi$$

$a = 10 \text{ cm}$, de tal forma que a velocidade angular de rotação de seu raio polar é constante e igual a 6° por segundo. Determinar a velocidade com que se alonga o raio polar r , no momento em que $r = 25 \text{ cm}$.

Questão 60. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

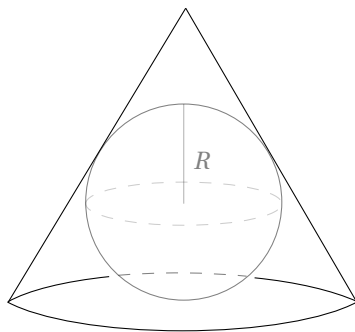
Uma barra heterogênea AB tem 12 cm de comprimento. A massa de sua parte AM cresce proporcionalmente ao quadrado da distância do ponto móvel M , em relação ao extremo A e é igual a 10 g , sendo $AM = 2 \text{ cm}$. Achar a massa de toda a barra AB e a densidade linear em qualquer ponto M da mesma. A que é igual a densidade linear da barra nos pontos A e B ?

Questão 61. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Demonstrar que um erro relativo em 1%, cometido na determinação do comprimento do raio, dá lugar a um erro relativo de cerca de 2%, ao calcular-se a área do círculo e a superfície da esfera.

Questão 62. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

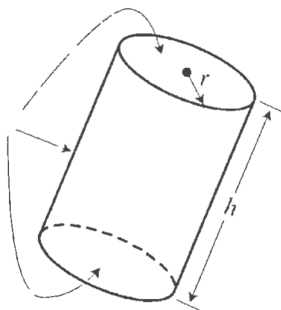
Determine a maior área possível que podemos obter ao torcer um fio de arame de comprimento l de maneira a formar um retângulo.

Questão 63. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

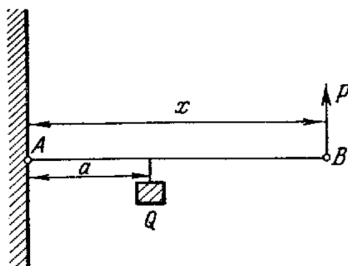
Um cone circular reto deve ser circunscrito numa esfera de raio dado. Ache a razão entre a altura e o raio da base do cone com o menor volume possível.

Questão 64. Calculus - M. Spivak (2003)

Entre todos os cilindros de volume fixo V , encontre aquele com a menor área de superfície (contabilizando as laterais, a base e o topo, conforme a figura que segue), determinando o raio r e a altura h em função de V .

**Questão 65. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)**

Uma barra uniforme AB que pode girar em torno do ponto A , suporta uma carga Q kg à distância de a cm do ponto A e é mantida em equilíbrio por meio de uma força vertical P , aplicada no seu extremo livre B . Cada centímetro de comprimento da barra pesa q kg. Determinar o comprimento x da mesma de tal forma que a força P seja a mínima possível e achar $P_{\min}$.



O momento realizado por cada força é medido como o produto entre a força e a distância até o pivô A . Construa a relação de equilíbrio.

Questão 66. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule $f'(x)$ pela definição.

$$f(x) = \frac{1}{x+1}$$

Questão 67. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule $g'(x)$ sendo g dada por

$$g(x) = \sqrt[9]{x}$$

Questão 68. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine a reta que é tangente ao gráfico de $f(x) = x^2$ e paralela à reta $y = 4x + 2$.

Questão 69. Calculus - Apostol (1967)

Determine a derivada $f'(x)$ de

$$f(x) = \sin(\cos^2 x) \cdot \cos(\sin^2 x)$$

Questão 70. Calculus - Apostol (1967)

Determine a derivada $f'(x)$ de

$$f(x) = \sin^n x \cdot \cos nx$$

Questão 71. Calculus - Apostol (1967)

Determine a derivada $f'(x)$ de

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x+\sqrt{1+x^2})}$$

Questão 72. Calculus - Apostol (1967)

Uma partícula é restrita a se mover ao longo de uma parábola cuja equação é $y = x^2$.

- (a) Em que ponto da curva as abscissa e ordenada estão mudando na mesma taxa?
- (b) Determine essa taxa se o movimento é tal que, no instante t , temos $x = \sin t$ e $y = \sin^2 t$.

Questão 73. Calculus - Apostol (1967)

A equação $x \sin(xy) + 2x^2 = 0$ define y implicitamente como uma função de x . Assumindo que a derivada y' existe, mostre que ela satisfaz a equação

$$y'x^2 \cos(xy) + xy \cos(xy) + \sin(xy) + 4x = 0$$

Questão 74. Calculus - Apostol (1967)

Prove que, entre todos os retângulos de uma dada área, o quadrado tem o menor perímetro.

Questão 75. Calculus - Apostol (1967)

Um fazendeiro tem L pés de cerca para cercar um pasto retangular adjacente a um longo muro de pedra. Quais dimensões fornecem a área máxima do pasto?

Questão 76. Calculus - Apostol (1967)

Dado $S > 0$. Prove que, entre todos os números positivos x e y com $x + y = S$, a soma $x^2 + y^2$ é mínima quando $x = y$.

Questão 77. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0.

Questão 78. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Seja $f(x) = a^x$, em que $a > 0$ e $a \neq 1$ é um real dado. Mostre que $f'(x) = a^x \ln a$. Após mostrar, calcule a derivada de $f(x) = \pi^x$.

Questão 79. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = t g x$ no ponto de abscissa 0.

Questão 80. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule $f'(x)$ sendo

$$f(x) = \frac{x^2 + 1}{\sec x}$$

Questão 81. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Sejam f , g e h funções deriváveis. Verifique que

$$[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Questão 82. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule $f'(x)$ sendo

$$f(x) = (1 + \sqrt{x})e^x t g x$$

Questão 83. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine f' , f'' e f''' de

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

Questão 84. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Considere a função $y = \frac{t}{x+t}$, na qual $t = t(x)$ é uma função derivável. Calcule $\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1}$ sabendo que $\left. \frac{dt}{dx} \right|_{x=1} = 4$ e que $t = 2$ para $x = 1$. (Observe que t está sendo olhado como função de x .)

Questão 85. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Seja $x = \cos t$. Verifique que

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$$

Questão 86. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Suponha que $x = x(t)$ seja derivável até a 2ª ordem. Verifique que

$$\frac{d}{dt} \left(x \frac{dx}{dt} \right) = \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + x \frac{d^2x}{dt^2}$$

Questão 87. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ derivável até a 2ª ordem e seja g dada por $g(x) = f(e^{2x})$. Verifique que

$$g''(x) = 4e^{2x} [f'(e^{2x}) + e^{2x} f''(e^{2x})]$$

Questão 88. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine α de modo que $y = e^{\alpha x}$ verifique a equação

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = 0$$

Questão 89. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Seja $y = \frac{4}{x}$, em que $x = x(t)$ é uma função derivável num intervalo aberto I . Suponha que, para todo t em I , $x(t) \neq 0$ e $\frac{dx}{dt} = \beta$, β constante. Verifique que

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{8\beta^2}{x^3}$$

Questão 90. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Sejam f e g deriváveis em A , com $f(x) > 0$ em A . Verifique que, para todo x em A ,

$$[f(x)^{g(x)}]' = \underbrace{f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x)}_1 + \underbrace{g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x)}_2.$$

Observe: 1 é a derivada de $f(x)^{g(x)}$, supondo f constante; 2 é a derivada de $f(x)^{g(x)}$, supondo g constante.

Questão 91. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine o polinômio de Taylor de ordem 5 em volta de x_0 dado.

$$f(x) = \ln x \quad \text{e} \quad x_0 = 1$$

Questão 92. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine o polinômio de Taylor, de ordem 5, de $g(x) = \arctan x$ em volta de 0.

Questão 93. Cálculo - Stewart (2013)

Encontre o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - x}{x^3}$$

Questão 94. Cálculo - Stewart (2013)

Encontre o limite

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan(1/x)$$

Questão 95. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Seja $f(x) = (1 + x)^\alpha$, em que $\alpha \neq 0$ é um real dado. Determine o polinômio de Taylor, de ordem n , de f em volta de $x_0 = 0$ e dê a expressão do erro em termos da derivada de ordem $n + 1$. Consulte também o valor do polinômio para x pequeno (esse resultado é importantíssimo, frequentemente aparece em muitas análises físicas).

Integrais

“Ah, se eu tivesse os teoremas! Achar as demonstrações seria a parte mais fácil.”

— BERNHARD RIEMANN

3.1 ■ A integral de Riemann em toda a sua glória

Integrais são operações matemáticas que nos fornecem a soma contínua de funções em intervalos, o que é essencial para calcular áreas sob curvas e volumes, além de muitas outras aplicações. A chamada *integral de Riemann* é uma forma conveniente de atingir esses objetivos:

INTEGRAL DE RIEMANN

Seja $f(x)$ uma função definida e limitada em um intervalo fechado $[a, b]$. A integral de Riemann de f entre a e b é o limite no infinito da *soma de Riemann*:

$$\int_a^b f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta \xi$$

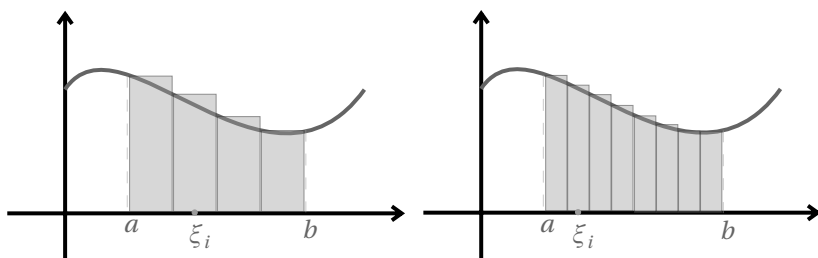
onde ξ_i é um ponto qualquer no subintervalo $[\xi_{i-1}, \xi_i]$, e $\Delta \xi$ é a largura desse subintervalo. O intervalo $[a, b]$ é dividido em n subintervalos, procedimento que chamamos de *partição*:

$$\mathbb{P}_{[a,b]} = \{\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n\}$$

com isso, fazemos n tender ao infinito. É convencional particionar o intervalo de tal forma que a largura dos subintervalos seja a mesma. Se o limite da soma de Riemann existir e for o mesmo para qualquer escolha de ξ_i nos subintervalos, então a função $f(x)$ é dita integrável no intervalo $[a, b]$, sendo o limite o resultado da

integral de Riemann, que por sua vez representa a área abaixo do gráfico de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$.

Chamamos a função $f(x)$ de *integrando* e $[a, b]$ de *intervalo de integração*, sendo a e b os *extremos*. Esta definição formaliza a ideia de área sob a curva da função $f(x)$ de a até b . Cada subintervalo determina um retângulo, de altura igual a $f(\xi_i)$ e base $\Delta\xi = \xi_i - \xi_{i-1}$. Aumentar o número de retângulos, refinando a partição, garante uma área cada vez mais precisa, de forma que tomando o limite da soma da área dos retângulos encontramos a área exata, esse processo é ilustrado na figura a seguir.



ANIMAÇÃO: INTEGRAL DE RIEMANN

Escaneie o QR code para assistir a animação sobre a integral de Riemann e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!



Assim como os limites e as derivadas, as integrais possuem propriedades fundamentais que simplificam a integração de funções mais complexas. As mais importantes são apresentadas a seguir.

PROPRIEDADES DAS INTEGRAIS

Sejam f e g funções integráveis e α, β constantes. Então:

1. A integral da soma é a soma das integrais

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

2. Aditividade com respeito aos intervalos de integração

$$\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$$

3. Invariante por translação do intervalo de integração

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx, \quad c \in \mathbb{R}$$

4. Expansão ou contração do intervalo de integração

$$\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b f(x) dx, \quad k \in \mathbb{R}^+$$

Demonstração. Vamos aplicar a definição a cada caso.

1. Para mostrar que $\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$, consideramos a definição de integral para uma função $h(x) = \alpha f(x) + \beta g(x)$ particionando o intervalo $[a, b]$ em subintervalos e aplicando a linearidade da soma:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n h(x_i^*) \Delta x_i &= \sum_{i=1}^n (\alpha f(x_i^*) + \beta g(x_i^*)) \Delta x_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(x_i^*) \Delta x_i \end{aligned}$$

Tomando o limite das somas de Riemann, obtemos

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx.$$

2. Para provar que $\int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$, vamos entender que a integral de $f(x)$ em $[a, b]$ pode ser dividida em duas integrais que correspondem às partes $[a, c]$ e $[c, b]$.

Pelo conceito de integral definida, sabemos que a integral de $f(x)$ no intervalo $[a, b]$ é dada pelo limite das somas de Riemann:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(x_i^*) \Delta x_i,$$

onde dividimos $[a, b]$ em n subintervalos de comprimento Δx_i . Quando escolhemos um ponto $c \in (a, b)$, podemos dividir o intervalo $[a, b]$ em dois intervalos menores: $[a, c]$ e $[c, b]$. Assim, a soma de Riemann original se separa em duas partes, uma para $[a, c]$ e outra para $[c, b]$:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx.$$

3. Para provar que $\int_a^b f(x) dx = \int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx$, vamos usar a substituição $u = x - c$.

- Com essa substituição, temos $\frac{du}{dx} = 1 \implies du = dx$, de modo que a variação de x se transfere diretamente para u .
- Ao substituir os limites de integração, quando $x = a + c$, obtemos $u = a$; e quando $x = b + c$, obtemos $u = b$.
- Isso transforma a integral de $f(x - c)$ no intervalo $[a + c, b + c]$ para a integral de $f(u)$ no intervalo $[a, b]$:

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = \int_a^b f(u) du.$$

Como a letra u é arbitrária, obtemos que

$$\int_{a+c}^{b+c} f(x-c) dx = \int_a^b f(x) dx,$$

4. Para provar que $\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b f(x) dx$, fazemos a substituição $u = \frac{x}{k}$, que implica que $x = ku$ e, portanto, $dx = k du$.

- Com essa substituição, os limites de integração se ajustam: quando $x = ka$, obtemos $u = a$; e quando $x = kb$, obtemos $u = b$.
- Ao aplicar essa substituição na integral, temos:

$$\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx = \int_a^b f(u) \cdot k du.$$

- Como k é uma constante, ela pode ser fatorada para fora da integral e usamos mais uma vez do fato de que a letra u é arbitrária:

$$\int_{ka}^{kb} f\left(\frac{x}{k}\right) dx = k \int_a^b f(u) du = k \int_a^b f(x) dx.$$

□

ANIMAÇÃO: INTEGRAIS DE FUNÇÕES ÍMPARES E PARES

Escaneie o QR code para assistir a animação sobre a integral de funções ímpares e pares e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!



3.2 ■ Teorema Fundamental do Cálculo

Um fato extraordinário no cálculo é a relação da integral com a derivada. Antes de enunciá-los, precisamos primeiro de alguns resultados que serão úteis para demonstrá-los.

TEOREMA DE COMPARAÇÃO

1. Se $f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq 0.$$

2. Se $f(x) \geq g(x)$ para $a \leq x \leq b$, então

$$\int_a^b f(x) dx \geq \int_a^b g(x) dx.$$

3. Se m e M são constantes tais que $m \leq f(x) \leq M$ para $a \leq x \leq b$, então

$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a).$$

Demonstração. Se convença geometricamente — pense nas áreas abaixo dos gráficos! $\square$

TEOREMA DO VALOR MÉDIO PARA INTEGRAIS

Se $f(x)$ é contínua em um intervalo $[a, b]$, então existe pelo menos um ponto $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Essa fórmula também pode ser expressa como

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a).$$

Demonstração. Como $f(x)$ é contínua no intervalo fechado $[a, b]$, o teorema de Weierstrass garante que ela atinge seus valores mínimo m e máximo M nesse intervalo. Assim, para todo $x \in [a, b]$, temos:

$$m \leq f(x) \leq M \implies m(b-a) \leq \int_a^b f(x) dx \leq M(b-a)$$

Dividindo ambos os lados por $b-a$, resulta em:

$$m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M.$$

Agora, observe que $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ é um número que se encontra entre m e M , os valores mínimo e máximo de $f(x)$ em $[a, b]$. Como $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, pelo Teorema do Valor Intermediário, existe um ponto $c \in [a, b]$ tal que

$$f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx.$$

Assim, mostramos que existe um ponto c no intervalo $[a, b]$ que satisfaz a condição do Teorema do Valor Médio para Integrais, concluindo a demonstração. $\square$

Agora sim, vamos aos teoremas fundamentais. *Você está preparado?*

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO I (TFC I)

Se f é uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e F é a função integral definida por

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

para x em $[a, b]$, então F é diferenciável em $[a, b]$ e sua derivada é f , ou seja, $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in [a, b]$. Frequentemente, a conclusão deste teorema é escrita equivalentemente como

$$\frac{d}{dx} \int_a^x f(t) dt = f(x)$$

O teorema não só estabelece uma relação íntima entre a integração e a derivação, como também garante que qualquer função integrável tem uma *antiderivada*, também chamada de primitiva, isto é, uma função que quando derivada fornece a função original. Em particular, o teorema garante que qualquer função contínua possui uma antiderivada.

Demonstração. Para demonstrar que $F'(x) = f(x)$, aplicamos a definição de derivada à função $F(x) = \int_a^x f(t) dt$:

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h}.$$

Substituindo a definição de F , temos

$$\begin{aligned} F'(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_a^{x+h} f(t) dt + \int_x^a f(t) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_x^a f(t) dt + \int_a^{x+h} f(t) dt \right) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\int_x^{x+h} f(t) dt \right) \end{aligned}$$

Agora, observe que $\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt$ representa o valor médio de $f(t)$ no intervalo $[x, x+h]$. Como f é contínua, pelo Teorema do Valor Médio para integrais, existe um ponto $c \in [x, x+h]$ tal que

$$\frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(c).$$

Quando $h \rightarrow 0$, o ponto c se aproxima de x . Assim, pelo fato de f ser contínua, temos

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(c) = f(x).$$

Portanto,

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t) dt = f(x),$$

o que conclui a prova. $\square$

EXEMPLO 9

Suponha que desejamos encontrar a derivada de

$$g(x) = \int_1^x \frac{1}{t^3 + 1} dt$$

Pelo TFC I, a derivada é dada por

$$g'(x) = \frac{1}{x^3 + 1}$$

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO II (TFC II)

Seja f uma função contínua no intervalo fechado $[a, b]$ e F uma função tal que $F'(x) = f(x)$ em todo o intervalo $[a, b]$, isto é, uma *primitiva* de f . Então,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b F'(x) dx = F(b) - F(a).$$

Este teorema conecta a integral definida de f no intervalo $[a, b]$ com as diferenças dos valores de uma antiderivada de f , nos extremos do intervalo. Isso significa que a integral definida de f ao longo de $[a, b]$ é igual ao acréscimo de F ao passar de a para b .

Demonstração. Para demonstrar o TFC II, consideremos uma partição regular do intervalo $[a, b]$ com $P = \{x_i\}_{i=0}^n$, onde $x_0 = a$, $x_n = b$, e $x_i - x_{i-1} = \Delta x$ para $i = 1, \dots, n$. Podemos escrever

$$F(b) - F(a) = F(x_n) - F(x_0).$$

Construindo uma soma telescópica, temos

$$F(b) - F(a) = [F(x_n) - F(x_{n-1})] + [F(x_{n-1}) - F(x_{n-2})] + \cdots + [F(x_1) - F(x_0)]$$

Escrito em notação somatório:

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n [F(x_i) - F(x_{i-1})].$$

Já que F é uma antiderivada de f em $[a, b]$, usemos o Teorema do Valor Médio para derivadas, de forma que para cada subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ existe um ponto $c_i \in [x_{i-1}, x_i]$ tal que

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = F'(c_i)(x_i - x_{i-1}) = f(c_i)\Delta x.$$

Substituindo essa expressão na soma anterior, obtemos

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x.$$

Ao tomarmos o limite conforme $n \rightarrow \infty$ (e, consequentemente, $\Delta x \rightarrow 0$), essa soma de Riemann converge para a integral de f no intervalo $[a, b]$:

$$F(b) - F(a) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(c_i)\Delta x = \int_a^b f(x) dx.$$

Assim, concluímos que

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

completando a prova. □

O TFC I e o TFC II exibem em conjunto de forma surpreendente o fato de que a derivada e a integral são operações inversas uma da outra, no sentido de que se aplicamos uma após a outra voltamos para a função original.

Por vezes, não estamos interessados em calcular a área abaixo de uma curva em um intervalo específico, mas tão somente em determinar uma primitiva de f (afinal, pelo TFC II, saber a primitiva nos fornece a inte-

gral definida em qualquer intervalo que seja). Nesses casos, calculamos *integrais indefinidas*, onde não é especificado um intervalo de integração.

Esse cálculo geralmente é feito a partir do nosso conhecimento das primitivas de funções elementares em conjunto com técnicas de integração, que aprenderemos em breve. Contudo, note que se $F(x)$ é uma primitiva de $f(x)$, então $F(x) + C$, sendo C um número real qualquer, também é primitiva de $f(x)$, uma vez que $\frac{d}{dx}[F(x) + C] = \frac{dF}{dx} + 0 = f(x)$, lembrando que a derivada de uma constante é sempre zero. Por isso, quando calculamos integrais indefinidas a fim de determinar primitivas de funções, sempre precisamos incluir um termo constante adicional na resposta. Te apresento, a seguir, uma lista que elenca as primitivas das principais funções elementares. Como exercício, mostre por derivação que as funções realmente são primitivas.

PRIMITIVAS DE FUNÇÕES ELEMENTARES

$$\begin{aligned} \int x^n dx &= \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \quad (n \neq -1), & \int \frac{1}{x} dx &= \ln|x| + C \\ \int e^x dx &= e^x + C, & \int a^x dx &= \frac{a^x}{\ln a} + C \quad (a > 0, a \neq 1) \\ \int \cos x dx &= \sin x + C, & \int \sin x dx &= -\cos x + C \\ \int \sec^2 x dx &= \tan x + C, & \int \csc^2 x dx &= -\cot x + C \\ \int \sec x \tan x dx &= \sec x + C, & \int \csc x \cot x dx &= -\csc x + C \\ \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arcsin x + C, & \int \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \arccos x + C \\ \int \frac{1}{1+x^2} dx &= \arctan x + C \end{aligned}$$

3.3 ■ Técnicas de integração

Ao nos depararmos com integrais que não são imediatamente resolvidas pela aplicação direta das fórmulas de integração básicas para as funções elementares que acabamos de ver, recorreremos a técnicas de integração. Estas técnicas expandem nosso repertório para abordar o problema de encontrar a primitiva de uma variedade mais ampla de funções integráveis. No fim, todas as técnicas são manipulações permitidas que não alteram a primitiva que estivermos tentando encontrar mas facilitam a redução de uma integral aparentemente complicada a integral de uma função elementar, que conhecemos a primitiva diretamente.

Não existe forma sistemática para olhar para uma integral e já saber qual técnica usar, mas a experiência com a resolução de questões e o reconhecimento de alguns padrões vai te ajudando, com o tempo, a pegar o jeito. Vamos estudar cada uma das técnicas agora.

3.3.1 ■ Substituição

SUBSTITUIÇÃO

Também conhecida como mudança de variável, envolve substituir uma parte da função no integrando por uma nova variável. Se f é contínua em $[a, b]$ e g é diferenciável e sua derivada é contínua em $[c, d]$, onde $g([c, d]) \subset [a, b]$, então podemos chamar $u = g(x)$ de tal forma que $du = g'(x)dx$ e transformar a integral:

$$\int_a^b f(g(x))g'(x)dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(u)du,$$

É um pouco difícil de entender a dinâmica dessa técnica lendo apenas a definição, então observemos o seu uso na prática.

EXEMPLO 10

$$\int \cos(2x) dx$$

Fazendo a substituição $u = 2x$, temos $du = 2dx$, ou $dx = \frac{du}{2}$. A integral torna-se

$$\frac{1}{2} \int \cos(u) du = \frac{1}{2} \sin(u) + C = \frac{1}{2} \sin(2x) + C$$

Quando trabalhamos com integrais *definidas*, precisamos tomar um cuidado adicional com os intervalos de integração ao realizar mudanças de variável, porque em geral eles não se manterão os mesmos após realizarmos a substituição. Ao chamar $u = g(x)$ em uma integral definida em um intervalo $[a, b]$, os novos extremos de integração são obtidos ao avaliar $u = g(x)$ em a e em b , como foi mostrado na definição.

ANIMAÇÃO: INTEGRAL COM EXPONENCIAL DE ARCSIN

Escaneie o QR code para assistir o meu vídeo de resolução de $\int \frac{e^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$ e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!

**ANIMAÇÃO: INTEGRAL DO PROBLEMA DE KEPLER**

Escaneie o QR code para assistir a animação sobre a integral que aparece no problema de Kepler e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!



3.3.2 ■ Integração por partes

INTEGRAÇÃO POR PARTES

Essa técnica é obtida a partir da regra do produto das derivadas e costuma ser utilizada quando o integrando é o produto de duas funções entre as quais uma é facilmente derivável e a outra é facilmente integrável. Se $u(x)$ e $v(x)$ são funções diferenciáveis em um intervalo $[a, b]$, então:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx,$$

onde $u(x)v(x)\Big|_a^b$ representa a avaliação de $u(x)v(x)$ nos limites superior e inferior do intervalo, calculando sua diferença: $u(b)v(b) - u(a)v(a)$.

EXEMPLO 11

Usemos integração por partes para resolver a integral abaixo:

$$\int x e^x dx$$

Escolhendo $u(x) = x$ e $v'(x) = e^x dx$, obtemos $u'(x) = 1$ e $v(x) = e^x$ por integração direta^a. Assim, a integral torna-se

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C$$

Note que, nesse caso, calculamos uma integral indefinida, então não foi necessário avaliar as funções nos extremos. A técnica pode ser usada para obter tanto integrais definidas quanto indefinidas, assim como a substituição.

“Geralmente incluiríamos uma constante de integração aqui, mas no fim só queremos achar $v(x)$, uma primitiva de $v'(x)$, então podemos tomar essa constante como sendo zero.

ANIMAÇÃO: DEDUÇÃO DA FÓRMULA DA INTEGRAÇÃO POR PARTES

Escaneie o QR code para assistir a animação sobre a integração por partes e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!



3.3.3 ■ Frações parciais

FRAÇÕES PARCIAIS

Essa é uma técnica aplicada quando temos um integrando que é uma função racional, isto é, quocientes de polinômios. Ela consiste em expressar uma função racional complexa como a soma de termos mais simples, que podem ser facilmente integrados.

Uma função racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$, onde P e Q são polinômios e o grau de P é menor que o grau de Q , pode ser decomposta em uma soma de termos de polinômios e frações mais simples cujos denominadores são fatores de $Q(x)$. Primeiro, fatora-se o denominador $Q(x)$ completamente. Então, para cada fator do denominador, atribui-se uma constante ou um polinômio no numerador, dependendo se o fator é linear ou quadrático, respectivamente. Após a atribuição, determina-se os coeficientes desconhecidos através da igualdade com a função original.

EXEMPLO 12

Vamos usar frações parciais para resolver a integral a seguir:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x-2} dx$$

onde podemos fatorar o denominador: $x^2+x-2=(x+2)(x-1)$. Em seguida, expressamos $\frac{2x+3}{x^2+x-2} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-1}$ e resolvemos para A e B , realizando essa última soma de frações e igualando os coeficientes dos polinômios no numerador do lado esquerdo e direito. Obtemos um sistema de equações onde as incógnitas a serem determinadas são A e B . Obtidas essas duas constantes, a integral fica a soma de duas integrais simples:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x-2} dx = A \int \frac{dx}{x+2} + B \int \frac{dx}{x-1}$$

que podem ser resolvidas por substituição $u = x+2$ e $u = x-1$, obtendo integrais do tipo du/u , que por sua vez resultam em termos da forma $\ln|u|$. No final, encontramos:

$$\int \frac{2x+3}{x^2+x-2} dx = \frac{1}{3}(5\ln|1-x| + \ln|x+2|) + C$$

ANIMAÇÃO: FRAÇÕES PARCIAIS

Escaneie o QR code para assistir a minha animação sobre frações parciais e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!



3.3.4 ■ Técnica de Feynman

TÉCNICA DE FEYNMAN

A técnica de Feynman é um método poderoso para avaliar integrais paramétricas complexas. Ela consiste em introduzir um parâmetro auxiliar na integral e, em seguida, diferenciá-la em relação a esse parâmetro, o que costuma simplificar o processo de integração. O método é especialmente útil quando o integrando tem uma forma que pode ser tratada por diferenciação em relação ao parâmetro — reconhecer isso vai envolver um pouco de prática e experiência! Dada uma integral $I(\alpha) = \int f(x, \alpha) dx$, onde α é um parâmetro, diferenciamos ambos os lados em relação a α :

$$\frac{dI}{d\alpha} = \int \frac{\partial}{\partial \alpha} f(x, \alpha) dx.$$

Após calcular essa derivada, integramos em relação a α para encontrar o valor da integral original. Esse processo permite simplificar muitos problemas complexos de integração, transformando-os em integrações mais simples após a diferenciação.

ANIMAÇÃO: A INTEGRAL MAIS DIFÍCIL QUE EU JÁ VI

Escaneie o QR code para assistir a minha animação que mostra a técnica de Feynman em ação!



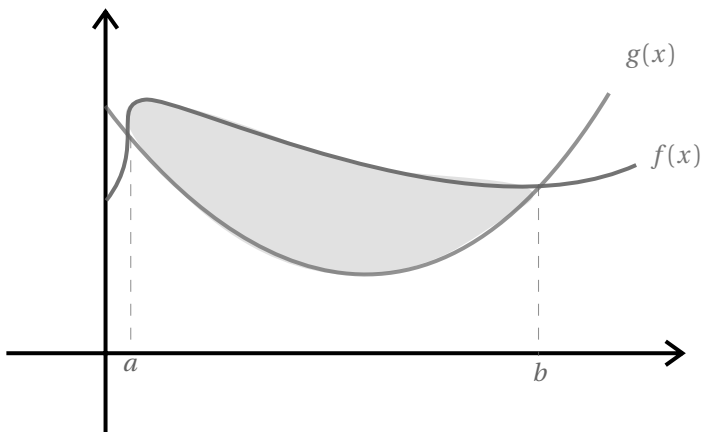
3.4 ■ Área entre funções

Quando desejamos calcular a área delimitada entre duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, sobre um intervalo $[a, b]$, podemos atingir esse objetivo integrando

a diferença entre as funções da forma seguinte:

$$A = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

onde a e b são as abscissas dos pontos de interseção entre as funções. O módulo serve para garantir que a área delimitada seja positiva, mas pode ser ignorado se você estudar o gráfico das funções e colocar a ordem da diferença de tal forma que a função que está “por cima” venha primeiro do que a função que está “por baixo”.



Em alguns casos, será necessário particionar o intervalo em dois ou mais subintervalos se as funções se alternarem em quem está por cima ou por baixo, ou seja, se tiverem várias interseções no intervalo dado. Dessa forma, separamos as integrais para cada subintervalo e colocamos a ordem da diferença no integrando de forma apropriada para manter a área positiva.

EXEMPLO 13

Considere as funções $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 2x + 1$. Queremos calcular a área delimitada entre $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[0, 2]$.

1. Primeiro, determinamos os pontos de interseção entre $f(x)$ e $g(x)$ resolvendo a equação $f(x) = g(x)$:

$$x^2 + 1 = 2x + 1.$$

Simplificando, obtemos:

$$x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x(x - 2) = 0.$$

Portanto, as funções se interceptam em $x = 0$ e $x = 2$, que são os limites do intervalo dado.

2. Verificamos qual função está "por cima" em cada ponto do intervalo. Observamos que para $x \in [0, 2]$, $g(x) = 2x + 1$ é maior que $f(x) = x^2 + 1$. Logo, podemos escrever a área como:

$$A = \int_0^2 [g(x) - f(x)] dx.$$

3. Substituímos as funções e integramos:

$$A = \int_0^2 [(2x + 1) - (x^2 + 1)] dx.$$

Simplificando o integrando:

$$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx.$$

4. Calculamos a integral:

$$A = \int_0^2 (2x - x^2) dx = \left[x^2 - \frac{x^3}{3} \right]_0^2.$$

Avaliando nos limites de integração:

$$A = \left(2^2 - \frac{2^3}{3} \right) - \left(0^2 - \frac{0^3}{3} \right) = 4 - \frac{8}{3} = \frac{12 - 8}{3} = \frac{4}{3}.$$

5. Portanto, a área delimitada entre as funções $f(x)$ e $g(x)$ no intervalo $[0, 2]$ é $\frac{4}{3}$ unidades quadradas.

3.5 ■ Comprimento de arco

O comprimento infinitesimal dS de um arco descrito pela curva de uma função contínua e diferenciável $y = f(x)$ é dado pelo teorema de Pitágoras:

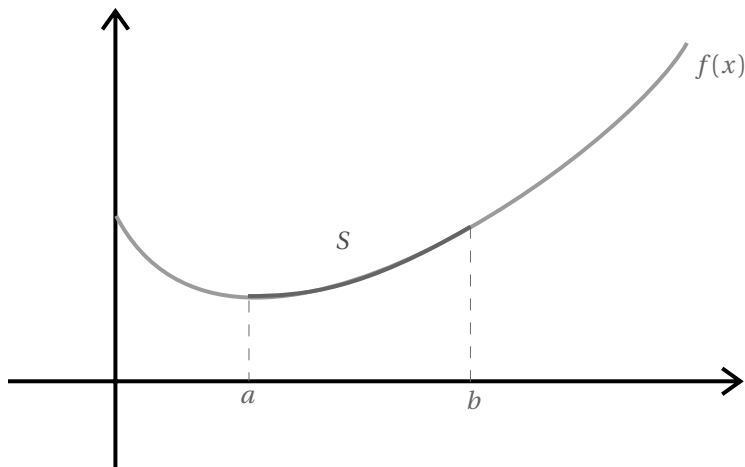
$$dS = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx,$$

portanto, o comprimento do arco descrito pelo gráfico de $f(x)$, de $x = a$ até $x = b$, em coordenadas cartesianas, é a integral (soma dos arcos infinitesimais):

$$S = \int_a^b dS = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx.$$

Este cálculo também pode ser estendido para coordenadas polares, onde a função é dada por $r = f(\theta)$, e o comprimento do arco de $\theta = a$ até $\theta = b$ é:

$$S = \int_a^b \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta.$$



EXEMPLO 14

Considere a função $f(x) = x^{3/2}$ e queremos calcular o comprimento do arco de $x = 0$ até $x = 1$.

1. Primeiro, encontramos a derivada de $f(x)$:

$$f'(x) = \frac{3}{2} x^{1/2}.$$

2. Substituímos $f'(x)$ na fórmula para o comprimento de arco:

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + \left(\frac{3}{2} x^{1/2}\right)^2} dx.$$

Simplificando a expressão dentro da raiz:

$$S = \int_0^1 \sqrt{1 + \frac{9}{4} x} dx.$$

3. Usamos a substituição $u = 1 + \frac{9}{4} x$, o que implica $du = \frac{9}{4} dx$ ou $dx = \frac{4}{9} du$.

4. Quando $x = 0$, $u = 1$; e quando $x = 1$, $u = \frac{13}{4}$. Assim, a integral torna-se:

$$S = \int_1^{13/4} \sqrt{u} \cdot \frac{4}{9} du.$$

5. Simplificamos e integramos:

$$S = \frac{4}{9} \int_1^{13/4} u^{1/2} du \implies S = \frac{4}{9} \cdot \frac{2}{3} u^{3/2} \Big|_1^{13/4}.$$

6. Avaliamos a integral nos limites:

$$S = \frac{8}{27} \left(\left(\frac{13}{4} \right)^{3/2} - 1 \right).$$

7. Assim, o comprimento do arco de $f(x) = x^{3/2}$ de $x = 0$ até $x = 1$ é aproximadamente $S \approx 0.590$ unidades.

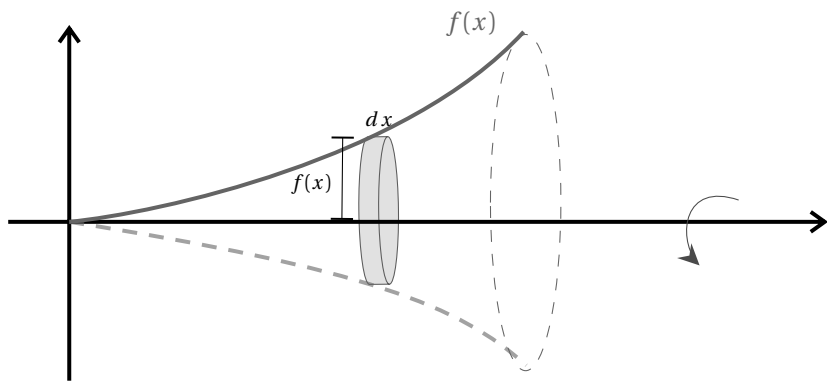
3.6 ■ Volume do sólido de revolução

O *método dos discos* é uma técnica para determinar o volume de um sólido de revolução, que é a forma tridimensional resultante da rotação de uma função $y = f(x)$ em torno de um eixo. Esse método é baseado na ideia de somar os volumes de discos infinitesimais que compõem o sólido. Considere a função $y = f(x)$, definida no intervalo fechado $[a, b]$, sendo girada em torno do eixo x . Ao girar a função, cada ponto $(x, f(x))$ traça um círculo cujo raio é dado pelo valor de $f(x)$ nesse ponto.

A área de cada círculo é $\pi[f(x)]^2$ (lembre-se da fórmula da área do círculo). Quando tomamos um pequeno segmento dx , o volume infinitesimal que esse disco representa é $\pi[f(x)]^2 dx$. Integrando essa área do disco ao longo do intervalo de x de a a b , obtemos o volume V do sólido de revolução:

$$V = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

A integral soma todos os pequenos volumes de discos ao longo do eixo x , resultando no volume total do sólido.



Para a representação em coordenadas polares, onde temos $r = f(\theta)$, o volume do sólido gerado pela rotação da curva em torno do eixo polar é calculado de maneira semelhante, mas levando em consideração a distância radial r e o ângulo θ . A rotação em torno do eixo polar significa que o volume de cada fatia é influenciado pela função $f(\theta)$ e sua derivada $f'(\theta)$, assim como pelo seno do ângulo θ , que determina a altura de cada fatia circular do sólido de revolução. Portanto, o volume em coordenadas

polares é dado por:

$$V = 2\pi \int_a^b f(\theta) \sin(\theta) [f'(\theta)] d\theta.$$

ANIMAÇÃO: VOLUME DO SÓLIDO DE REVOLUÇÃO

Escaneie o QR code para assistir a animação sobre o cálculo do volume de um sólido de revolução e eleve o seu conhecimento, visualizando melhor esse conceito!



EXEMPLO 15

Vamos encontrar o volume do sólido gerado pela rotação da função $f(x) = x^2$ ao redor do eixo x , no intervalo $x \in [0, 1]$.

1. Aplicando a fórmula diretamente:

$$V = \pi \int_0^1 [f(x)]^2 dx.$$

2. Substituímos $f(x) = x^2$ na integral:

$$V = \pi \int_0^1 (x^2)^2 dx = \pi \int_0^1 x^4 dx.$$

3. Calculamos a integral:

$$V = \pi \left[\frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \pi \cdot \frac{1}{5} = \frac{\pi}{5}.$$

4. Portanto, o volume do sólido gerado pela rotação da curva $y = x^2$ no intervalo $x \in [0, 1]$ ao redor do eixo x é $V = \frac{\pi}{5}$ unidades cúbicas.

Pergunta: que sólido é formado pela revolução que fizemos?

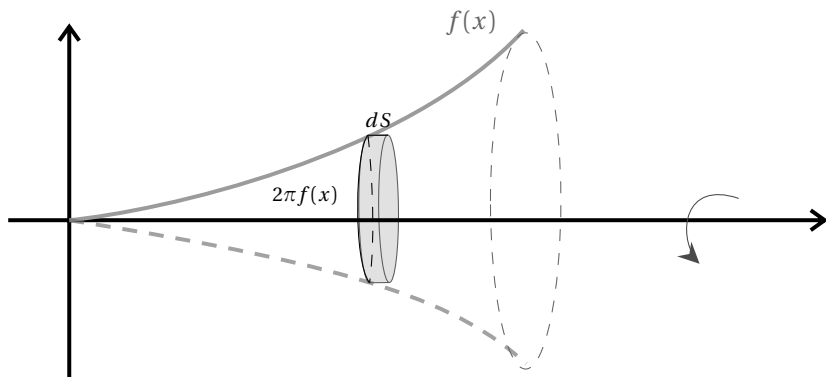
3.7 ■ Área superficial do sólido de revolução

Quando calculamos a área da superfície de um sólido de revolução, estamos interessados em quantificar o “tecido” que revestiria esse sólido. Consideremos que este “tecido” é constituído por uma coleção de faixas infinitesimais que, juntas, recriam a superfície do sólido.

Para uma função $y = f(x)$, definida de $[a, b]$, que é girada em torno do eixo x , a área dA de cada faixa é igual ao comprimento de arco infinitesimal de f sobre o intervalo diferencial dx , vezes a circunferência do sólido neste ponto, que é $2\pi f(x)$. Estamos aproximando a espessura do cilindro pelo comprimento infinitesimal de arco. Com efeito,

$$dA = (2\pi f(x))dS = 2\pi f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

$$\Rightarrow A = \int_a^b dA = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$



Esse cálculo, muitas vezes chamado de *método dos cilindros* ou *método dos anéis*, nos dá a área da superfície do sólido de revolução em coordenadas cartesianas. Para coordenadas polares, com a função dada por $r = f(\theta)$, a lógica é a mesma, mas agora o comprimento de arco é influenciado pela variação de θ e a largura de cada faixa é ainda $2\pi f(\theta)$. A área superficial para a revolução em torno do eixo polar é dada por:

$$A = 2\pi \int_a^b f(\theta)\sqrt{[f(\theta)]^2 + (f'(\theta))^2} d\theta.$$

EXEMPLO 16

Vamos calcular a área da superfície do sólido gerado pela rotação da função $f(x) = x$ em torno do eixo x , no intervalo $x \in [1, 3]$.

1. A fórmula para a área superficial de revolução é:

$$A = 2\pi \int_1^3 f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx.$$

2. Substituímos $f(x) = x$ e calculamos $f'(x)$:

$$f'(x) = 1.$$

3. Substituindo na fórmula da área, temos:

$$A = 2\pi \int_1^3 x \sqrt{1 + (1)^2} dx.$$

4. Simplificamos a expressão dentro da raiz:

$$A = 2\pi \int_1^3 x \sqrt{2} dx.$$

5. Podemos simplificar ainda mais, fatorando $\sqrt{2}$ para fora da integral:

$$A = 2\pi \sqrt{2} \int_1^3 x dx.$$

6. Agora, integramos x em relação a x :

$$A = 2\pi \sqrt{2} \left[\frac{x^2}{2} \right]_1^3.$$

7. Substituindo os limites, obtemos:

$$A = 2\pi \sqrt{2} \left(\frac{3^2}{2} - \frac{1^2}{2} \right).$$

8. Calculando cada termo, temos:

$$A = 2\pi \sqrt{2} \left(\frac{9}{2} - \frac{1}{2} \right) = 2\pi \sqrt{2} \cdot \frac{8}{2} = 8\pi \sqrt{2}.$$

9. Portanto, a área da superfície do sólido gerado pela rotação de $y = x$ no intervalo $x \in [1, 3]$ em torno do eixo x é $A = 8\pi\sqrt{2}$ unidades quadradas.

Pergunta: que sólido é formado pela revolução que fizemos?

3.8 ■ Exercícios de integrais

Questão 96. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule a integral definida a seguir.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx$$

Questão 97. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Encontre o resultado para a seguinte integral definida:

$$\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x + 1} \, dx$$

Questão 98. Problemas Seleccionados de Cálculo - V. H. S. Lins (2024)

Calcule

$$\int x e^{-x^2} \, dx$$

Questão 99. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Determine

$$\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$$

Questão 100. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule a área do conjunto de todos os pontos (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$.

Questão 101. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Ache a área da região limitada pelas curvas $y = \sin x$, pela reta $y = 1$, e pelo eixo das ordenadas, considerando a região à direita do eixo y .

Questão 102. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Calcular a área do segmento de parábola $y = x^2$, que corta a reta $y = 3 - 2x$.

Questão 103. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine $\int \sec x \, dx$.

Questão 104. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Calcule $\int \tan^2 x \, dx$.

Questão 105. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Encontre

$$\int \frac{dx}{2x^2 + 8x + 20}$$

Questão 106. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Demonstre que para todo $n > 1$ natural vale

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

Questão 107. Problemas Seleccionados de Cálculo - V. H. S. Lins (2024)

Ache

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} \cos(x) dx$$

Questão 108. Instituto de Física - USP (2024)

A seguinte integral aparece na resolução do problema de Kepler:

$$I = \int \frac{dr}{r \sqrt{2Er^2 + 2r - p_\theta^2}}$$

sendo $E < 0$ e $p_\theta > 0$ constantes reais. Sabendo que $I = \frac{1}{p_\theta} \int d\theta$, determine $r(\theta)$ resolvendo a integral e isolando r em função de θ . Mostre que $r(\theta)$ descreve a equação de uma elipse em coordenadas polares.

Questão 109. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)Sejam $\alpha \neq 0$ e β constantes. Determine a integral abaixo.

$$\int \frac{1}{\alpha^2 + (x + \beta)^2} dx$$

Questão 110. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Calcule

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}.$$

Questão 111. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Encontre

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}.$$

Questão 112. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Obtenha o resultado para a integral indefinida abaixo.

$$\int \frac{1}{1 - \cos x + \sin x} dx$$

Questão 113. Cálculo das Funções de uma Variável - G. Ávila (2003)

Ache

$$\int \frac{1 + \sinh x}{1 + \cosh x} dx$$

Questão 114. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Encontre

$$\int \frac{\ln^3(w)}{w \sqrt{\ln^2(w) - 4}} dw$$

Questão 115. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Calcule $\int x \sin x \cos x dx$.

Questão 116. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Obtenha o resultado para a integral indefinida abaixo.

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx.$$

Questão 117. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Determine a integral abaixo e verifique sua resposta através da de-

rivação.

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx$$

Questão 118. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Obtenha o resultado da seguinte integral indefinida

$$\int \frac{\sqrt{2+x^2} - \sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$$

Questão 119. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Encontre

$$\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$$

Questão 120. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Encontre $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ de modo que $\sin 6x \cos x = \frac{1}{2}(\sin \alpha x + \sin \beta x)$. Sugestão: use $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$. Depois disso, calcule $\int \sin 6x \cos x dx$.

Questão 121. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Determine

$$\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 + a^2 x^2}}$$

Questão 122. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Calcule

$$\int_{-1}^2 \ln(x+2) dx$$

Questão 123. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Ache

$$\int \arctan(\sqrt{x}) dx$$

Questão 124. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)Mostre, **por integração**, que

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = e^{ax} \frac{b \sin(bx) + a \cos(bx)}{a^2 + b^2}$$

Questão 125. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Mostre que

$$\int_0^{\pi} \sin(\sqrt{x}) dx \leq \pi$$

Dica: use o teorema do valor médio.

Questão 126. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Calcule

$$\frac{d}{dx} \int_3^{\sin x} \frac{1}{1-t^2} dt$$

Questão 127. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Determine

$$\int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1+x^2) + 1}{1+x^2} dx$$

Questão 128. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

Ache

$$\int \frac{\sec^4(\ln x)}{x} dx$$

Questão 129. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Calcule

$$\int x \arctan(\sqrt{x^2 - 1}) dx$$

Questão 130. O Cálculo com Geometria Analítica - L. Leithold (1994)

A catenária é a curva formada por um cabo flexível com densidade uniforme, pendurado entre dois pontos, sob a ação de seu próprio peso. Alguns cabos de suspensão de pontes e fios de telefone presos a dois postes apresentam essa forma. Se o ponto mais baixo da catenária for $(0, a)$, podemos mostrar que a equação dela é

$$y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right), \quad a > 0$$

Ache o comprimento do arco da catenária definida pela equação anterior, entre os pontos $(0, a)$ e (x_1, y_1) , onde $x_1 > 0$.

Questão 131. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Determinar a área interior à lemniscata $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$.

Questão 132. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Achar a **área limitada** pelo astróide, definido através da equação seguinte:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$$

Questão 133. Cálculo Diferencial e Integral - N. Piskunov (1988)

Encontrar o comprimento da cardióide $\rho = a\sqrt{1 + \cos \theta}$.

Questão 134. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Determine o **comprimento** do astróide definido através da equação

$$x_{\text{ast}}^2 + y_{\text{ast}}^2 = a_{\text{ast}}^2$$

Questão 135. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Considere um triângulo isósceles situado no semiplano $y \geq 0$ e com base paralela ao eixo x . Mostre que o volume do sólido obtido pela rotação deste triângulo, em torno do eixo x , é igual ao produto da área deste triângulo pelo comprimento da circunferência gerada, na rotação, pelo baricentro do triângulo.

Questão 136. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Achar o volume do toro, formado pela rotação do círculo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$, dado que $b \geq a > 0$, em torno do eixo Ox .

Questão 137. Problemas e Exercícios de Análise Matemática - B. Demidovitch (1987)

Encontrar a área da superfície formada ao girar um arco da cicloide $x = a(t - \sin t)$, $y = a(1 - \cos t)$, em torno do seu eixo de simetria.

Questão 138. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x , do gráfico da função $f(x) = \cosh x$, considerando que $x \in [-1, 1]$.

Questão 139. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule

$$\int_1^2 x^2(x-2)^{10} dx$$

Questão 140. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Suponha f contínua em $[-1, 1]$. Calcule $\int_0^1 f(2x-1) dx$ sabendo que $\int_{-1}^1 f(u) du = 5$.

Questão 141. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Seja f uma função par e contínua em $[-r, r]$, $r > 0$. (Lembre-se: f par $\Leftrightarrow f(-x) = f(x)$.)

(a) Mostre que

$$\int_{-r}^0 f(x) dx = \int_0^r f(x) dx.$$

(b) Conclua de (a) que

$$\int_{-r}^r f(x) dx = 2 \int_0^r f(x) dx.$$

Interprete graficamente.

Questão 142. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx$$

sendo m e n naturais não nulos.

Questão 143. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx$$

sendo m e n naturais não nulos.**Questão 144. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)**

Calcule

$$\int \cos^2(5x) dx$$

Questão 145. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule

$$\int \cos^3(x) (1 + \sqrt{\sin x}) dx$$

Questão 146. Um Curso de Cálculo - Guidorizzi (2013)

Calcule o comprimento do gráfico da função dada

$$y = \frac{4}{3}x + 3, \quad 0 \leq x \leq 2$$

Questão 147. Cálculo - Stewart (2013)

Calcule

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx$$

Por substituição trigonométrica.

Questão 148. Cálculo - Stewart (2013)

Encontre o volume do sólido obtido pela rotação em torno do eixo x da região delimitada pelas curvas $y = \frac{9}{x^2+9}$, $y = 0$, $x = 0$ e $x = 3$.

Questão 149. Calculus - Apostol (1967)

Resolva usando integração por partes

$$\int x^2 \sin^2 x \, dx$$

Questão 150. Calculus - Apostol (1967)

Calcule

$$\int x^4(1+x^5)^5 \, dx$$

Somatório e Produtório

Neste apêndice, exploraremos as notações de somatório e produtório, que aparecem em diversos momentos ao longo do livro. A notação de somatório é uma maneira compacta de representar a soma de uma sequência de termos. Ela é expressa pelo símbolo $\sum$, seguido de uma variável de índice, que indica o termo da sequência que estamos somando. Ela possui a seguinte forma geral:

$$\sum_{i=m}^n a_i = a_m + a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots + a_n$$

onde:

- i é a variável de índice
- m é o valor inicial do índice;
- n é o valor final do índice;
- a_i é o termo geral da sequência que estamos somando.

EXEMPLO 17

Para ilustrar, considere a soma dos cinco primeiros números inteiros positivos. Usando a notação de somatório, temos:

$$\sum_{i=1}^5 i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$

Algumas propriedades úteis da notação de somatório incluem:

1. Distributividade: $\sum_{i=m}^n (a_i + b_i) = \sum_{i=m}^n a_i + \sum_{i=m}^n b_i$
2. Fatoração de Constantes: $\sum_{i=m}^n c \cdot a_i = c \cdot \sum_{i=m}^n a_i$, onde c é uma constante.

3. Somatório de uma Constante: $\sum_{i=m}^n c = c \cdot (n - m + 1)$

Essas propriedades permitem simplificar somas complexas e são frequentemente usadas em manipulações algébricas. Alguns somatórios aparecem com frequência e têm resultados conhecidos, como:

- A soma dos primeiros n números inteiros: $\sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$
- A soma dos primeiros n quadrados: $\sum_{i=1}^n i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

A notação de produtório, expressa pelo símbolo $\prod$, é uma maneira compacta de representar o produto de uma sequência de termos. Assim como a notação de somatório, ela também possui uma variável de índice. Ela tem a forma geral:

$$\prod_{i=m}^n a_i = a_m \cdot a_{m+1} \cdot a_{m+2} \cdots a_n$$

onde:

- i é a variável de índice
- m é o valor inicial do índice;
- n é o valor final do índice;
- a_i é o termo geral da sequência que estamos multiplicando.

EXEMPLO 18

Para ilustrar, considere o produto dos cinco primeiros números inteiros positivos. Usando a notação de produtório, temos:

$$\prod_{i=1}^5 i = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$$

Algumas propriedades úteis da notação de produtório incluem:

- Distributividade da Multiplicação sobre Produtos: $\prod_{i=m}^n (a_i \cdot b_i) = \prod_{i=m}^n a_i \cdot \prod_{i=m}^n b_i$
- Produtório de uma Constante: Se $a_i = c$ para todos os i , então $\prod_{i=m}^n c = c^{n-m+1}$

Essas propriedades permitem simplificar produtos complexos e são úteis em manipulações algébricas. Em alguns casos, somatórios e produtórios podem aparecer combinados. Por exemplo:

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m a_{ij}$$

Essa expressão representa uma soma de produtos, onde cada produto é tomado em relação ao índice j e a soma em relação ao índice i . Essas combinações são comuns em áreas como álgebra linear e análise combinatória.

Conteúdo de apoio: animações!

Talvez você saiba que no meu Instagram (@vhslins) eu produzo conteúdo de física e matemática por meio de animações criadas em Python, através da biblioteca Manim (criada pelo Grant Sanderson do canal 3Blue1Brown). As animações são um poderoso recurso didático e podem ser peça-chave para você conseguir entender um conceito. Resolvi incluir nesse livro de cálculo algo inédito: um link para uma playlist que será atualizada com o tempo, onde eu irei subir animações adicionais às que já estão disponíveis no livro e que servirão de apoio para o seu estudo. Se certifique de consultá-la periodicamente e não perder as animações exclusivas que você terá acesso por ter investido neste livro. Para acessar, basta escanear o QR Code a seguir.

ANIMAÇÃO: CONHEÇA A PLAYLIST COMPLETA!

Escaneie o QR code e salve a playlist onde estarei subindo animações constantemente para servir de apoio ao seu estudo!



Bibliografias recomendadas

Quase todas as questões desta obra foram selecionadas e extraídas das principais bibliografias de Cálculo utilizadas no mundo todo: Spivak, Piskunov, Demidovitch, Leithold, Guidorizzi... fora as questões que eu peguei de provas e listas anteriores do Instituto de Matemática e Estatística e do Instituto de Física da USP. Algumas eu mesmo criei, porque achei que cabiam bem para te ensinar algo novo e te deixar mais inteligente. Além disso, toda a teoria presente nesta obra é fundamentada no conteúdo dessas literaturas. Procurei trazer aqui a minha abordagem e proposta didática, minhas explicações, ilustrações, animações e resoluções para te ajudar no seu processo de aprendizagem.

Porém, é evidente que essa não pode ser a sua única fonte de estudo se quiser ter uma formação completa em Cálculo. Com efeito, você não deve se ater nunca a um livro só durante a sua formação — cada autor explora os assuntos de forma diferente e uma perspectiva nova pode ser tudo que você precisa para entender algo que outrora estava impossível. Nesse cenário, eu gostaria de enfatizar minhas recomendações de livros de Cálculo, de acordo com o meu julgamento dos seus níveis de dificuldade (para que você tenha alguma referência e acabe não pegando um livro muito difícil e levando um choque).

- **Introdução** (pode ser usado até por quem está no ensino médio): *Cálculo em Quadrinhos*, Larry Gonick (de Harvard). Não subestime esse livro, apesar de ser em quadrinhos ele ensina muito.
- **Nível I:** *Cálculo, Volume 1*, Stewart. Bom se você vai começar do zero e não tem uma base forte em matemática.
- **Nível II:** *Um Curso de Cálculo, Volume 1*, Guidorizzi; *Cálculo com Geometria Analítica*, Leithold. Livros com explicações sólidas, são completos, possuem bons exercícios, mas a linguagem não é fácil. Necessário se debruçar sob várias passagens e estudar com afinco.

- **Nível III:** *Differential And Integral Calculus, Volume 1, Piskunov; Problemas e Exercícios de Análise Matemática, Demidovitch*. O primeiro é excelente, bem detalhado e explora bastante os exemplos, possui ótimos exercícios, é o pacote completo. O segundo é um livro de questões e possui milhares delas. A maioria das questões do Demidovitch não são fáceis, mas é uma ótima referência para quando você estiver querendo praticar, caso você já tenha terminado todas as questões do meu livro.
- **Nível IV:** *Calculus, Spivak*. É o livro de Cálculo mais técnico que conheço, preciso, bem humorado e detalhista. Fenomenal, mas exige uma maturidade razoável em matemática para conseguir acompanhar em sua inteireza.

Todos os que citei são livros-texto e possuem a minha recomendação de leitura em paralelo ao que você consumir neste livro aqui. Aproveitando o ensejo, se você acessar o link da minha bio no Instagram (@vhs-lins) poderá baixar o meu guia de estudos gratuito onde há todas as minhas indicações de livros e playlists de estudo, não só de cálculo mas das principais disciplinas dos cursos de exatas.

Orientações para estudar matemática

D.1 ■ Como saber se tenho boa base em matemática?

Como saber se consigo pilotar bem um jato? Ora, eu devo me testar com alguns conhecimentos teóricos sobre pilotagem e também me testar voando e avaliando o desempenho do voo. Como saber se sou um bom jogador de xadrez? Ora, eu devo resolver alguns puzzles para avaliar minha capacidade de reconhecer bons movimentos e também jogar algumas partidas de xadrez para ver como me saio na prática contra um adversário. No fim, faço a revisão da partida e revejo meus erros. Ou seja, a única forma de saber se você tem uma boa base é resolvendo uma bateria de questões de matemática básica e avaliando o seu desempenho. Vendo forças e fraquezas.

Não sei se você sabe, mas **eu escrevi um livro sobre matemática básica**. Acesse o Instagram da minha editora (@mobiuseditora) para mais informações.

D.2 ■ Existe forma certa de estudar matemática?

A resposta é que não. Cada um se identifica com uma abordagem diferente para estudar e contanto que você passe a sentir sua abordagem funcionando, estará no caminho certo. Porém, há alguns princípios que é consenso para a maioria dos que estudam matemática com sucesso, como: estudar por livros, anotar suas ideias durante uma leitura, escrever definições e demonstrações com suas próprias palavras e do seu jeito, analisar exemplos resolvidos e procurar por padrões, orientar o seu estudo à resolução de exercícios e aprender com os seus erros.

Se você seguir esses princípios e adaptar a metodologia geral para algo que funcione para você, no seu ritmo e rotina, tenho certeza que sua formação será brilhante.

D.3 ■ Matemática é difícil, o que fazer?

Com toda a humildade possível, você deve aceitar esse mundo novo, que você vai ter que engatinhar para aprender, que haverá dificuldade, que você vai ter que aprender o idioma abstrato da matemática para sequer conseguir ler o que está nos livros... que será um processo. Viva esse processo, enquanto o meio acadêmico fizer sentido para você, porque ele está cheio disso. A dificuldade não é só sua, mas de todo mundo que estuda matemática. Sinta-se acolhido pela comunidade e respeite o processo. Não tente se livrar das dificuldades, mas aprender a conviver com elas e entender que, depois de um tempo, o que era difícil vai se tornar mais fácil e outros desafios virão.

D.4 ■ Como saber se eu aprendi algo e avançar?

Vamos supor que você está estudando sobre polinômios. No primeiro contato, você estuda e resolve questões a nível de vestibular. Será que isso vai ser suficiente para o que você vai precisar de polinômios na faculdade? Provavelmente não. Daí você estuda polinômios na faculdade e resolve questões a nível superior. Será que isso vai ser suficiente para dar uma aula a nível superior sobre polinômios? O mais provável é que não. O que você deduzimos disso é que você precisa de um objetivo com aquele estudo, um parâmetro para saber quando está bom. Estabelecendo o **parâmetro**, você se testa por meio de questões e com um grau de acerto você pode seguir em frente para outros assuntos. *A hora de avançar para um novo conteúdo é aquela em que o seu parâmetro de avanço foi atingido.* A definição do parâmetro de avanço depende do seu objetivo. Se for um vestibular, por exemplo, um bom parâmetro de avanço é conseguir resolver uma série de questões anteriores daquele assunto no vestibular, que toquem em todos os pontos da teoria estudada.

Gabaritos

- | | |
|---------------------------|---|
| 1) 2 | 20) $a + 1$ |
| 2) $\sqrt{2}$ | 21) e^3 |
| 3) $\frac{3}{\sqrt{2}}$ | 22) 1 |
| 4) $\frac{1}{2}$ | 23) $\ln(a)$ |
| 5) $\frac{1}{3}$ | 24) -2 |
| 6) 2 | 25) 0 |
| 7) $\frac{3}{2}$ | 26) 0 |
| 8) -1 | 27) $\frac{1}{2}$ |
| 9) 0 | 28) 0 |
| 10) $32\sqrt{2}$ | 29) $\frac{1}{4}$ |
| 11) $-\frac{1}{2}$ | 30) $\frac{1}{2}$ |
| 12) $\frac{1}{2}$ | 31) $2\pi r$ |
| 13) 2 | 32) $\frac{1}{3}$ |
| 14) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 33) e |
| 15) 1 | 34) Demonstração |
| 16) 1 | 35) Demonstração |
| 17) 1 | 36) $\frac{6-14x}{(x-1)^3}$ |
| 18) $\sqrt{2}$ | 37) $\frac{-\ln x - x - 1}{x^2(\ln x)^2}$ |
| 19) $\frac{2}{3}$ | 38) $\frac{1}{\sqrt{1+e^t}}$ |

- 39) $a^{\tan(nx)} \ln(a) n \sec^2(nx)$
- 40) $(-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$
- 41) Demonstração
- 42) Demonstração
- 43) Demonstração
- 44) Veja na resolução
- 45) $\frac{2 \sec x}{\sqrt{\sin x}}$
- 46) $y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$
- 47) $P = (1/8, -1/16)$
- 48) Não existem soluções
- 49) $y + 32 = \frac{-253}{18} (x - 2)$
- 50) $y + \frac{1}{2} = -\left(x + \frac{1}{2}\right)$
- 51) Demonstração
- 52) $11/2$
- 53) $(5/6, 5/12)$
- 54) $y - 2 = -\frac{10}{7} (x - 2)$
- 55) Demonstração
- 56) Demonstração
- 57) $1/1000\pi \text{ m/s}$
- 58) $-1/95 \text{ rad/s}$
- 59) $\pi/3 \text{ cm/s}$
- 60) Ver na resolução
- 61) Demonstração
- 62) $A = l^2/16$
- 63) $2\sqrt{2}$
- 64) $r = \sqrt[3]{V/2\pi} \text{ e } h = \sqrt[3]{4V/\pi}$
- 65) $\sqrt{2Qa/q}$
- 66) $\frac{1}{(x+1)^2}$
- 67) $\frac{1}{9\sqrt{x^8}}$
- 68) $4x - 4$
- 69) Ver na resolução
- 70) Ver na resolução
- 71) $\frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$
- 72) (a) $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$, (b) $\frac{\pi}{6}$
- 73) Ver na resolução
- 74) Ver na resolução
- 75) $(x, y) = (\frac{L}{4}, \frac{L}{2})$
- 76) Ver na resolução
- 77) $y = x + 1$
- 78) Primeira parte na resolução, e $\pi^x \ln \pi$
- 79) $y = x$
- 80) $\frac{2x - (x^2 + 1) \tan x}{\sec x}$
- 81) Ver na resolução
- 82) $\frac{e^x \tan x}{2\sqrt{x}} + (1 + \sqrt{x})e^x \tan x + (1 + \sqrt{x})e^x \sec^2 x$
- 83) $f'(x) = -\frac{1}{x^2}, f''(x) = \frac{2}{x^3}, f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$
- 84) $\frac{2}{9}$
- 85) Ver na resolução
- 86) Ver na resolução
- 87) Ver na resolução
- 88) $\alpha = 1 \text{ ou } \alpha = 2$

- 89) Ver na resolução
- 90) Ver na resolução
- 91) $P(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5$
- 92) $P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$
- 93) $\frac{1}{6}$
- 94) 1
- 95) Ver na resolução
- 96) $\pi/4$
- 97) $5/6$
- 98) $-\frac{1}{2}e^{-x^2} + C$
- 99) $\frac{2}{3}(\sin x)^{3/2} + C$
- 100) $1/3$ unidades quadradas
- 101) $\frac{\pi}{2} + 1$ unidades quadradas
- 102) 10,67 unidades quadradas
- 103) $\ln|\sec x + \tan x| + C$
- 104) $\tan x - x + C$
- 105) $\frac{1}{2\sqrt{6}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right)} + C$
- 106) Demonstração
- 107) 0
- 108) Demonstração
- 109) $\frac{1}{a}\arctan\left(\frac{x+\beta}{a}\right) + C$
- 110) $\frac{1}{2}\ln|x-1| - \frac{1}{3}\ln|x+2| + \frac{1}{4}\ln|x+3| + C$
- 111) $\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$
- 112) $\ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x+\sin x}\right| + C$
- 113) $\frac{-2}{e^{x+1}} + \ln(1 + \cosh x) + C$
- 114) $\frac{1}{3}\sqrt{\ln^2(w)-4}(\ln^2(w)+8) + C$
- 115) $-\frac{x\cos(2x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{8} + C$
- 116) $\ln(x)(\ln(\ln(x))-1) + C$
- 117) $4\sqrt{2}$
- 118) $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}\right) + C$
- 119) $3\ln|2 + \cos x| + \frac{1}{2}\cos^2 x - 2\cos x - 6 + C$
- 120) $\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{7}\cos 7x - \frac{1}{5}\cos 5x\right) + C$
- 121) $\frac{1}{a}\sinh^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right) + C$
- 122) $\approx 2,54$
- 123) $x \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + C$
- 124) Demonstração
- 125) Demonstração
- 126) $\sec x$
- 127) $e^{\arctan x} + \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \arctan x + C$
- 128) $\frac{\sec^2(\ln x)\tan(\ln x)}{3} + \frac{2\tan(\ln x)}{3} + C$
- 129) $\frac{x^2}{2}\arctan(\sqrt{x^2-1}) - \frac{\sqrt{x^2-1}}{2} + C$
- 130) $a \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$
- 131) a^2
- 132) $\frac{3\pi a^2}{8}$
- 133) $8a$
- 134) $6a$
- 135) Demonstração

136) $2\pi^2 a^2 b$

137) $6\pi^2 a^2$

138) $2\pi(1 + \sinh 2)$

139) $\frac{46}{429}$

140) $\frac{5}{2}$

141) Demonstração

142) 0

143) 0, se $n \neq m$, π , se $n = m$

144) $\frac{\sin(10x)}{20} + \frac{x}{2} + C$

145) $\sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + \frac{2}{3}\sqrt{\sin^3(x)} - \frac{2}{7}\sqrt{\sin^7(x)} + C$

146) $\frac{10}{3}$

147) $\ln \left| \frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}} + C$

148) $V = \frac{3\pi^2}{8} + \frac{3\pi}{4}$

149) $\frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \sin 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C$

150) $\frac{(1+x^5)^6}{30} + C$

Resoluções Comentadas

Enfatizo: só olhe essas resoluções quando tiver admitido “eu desisto”. O mundo real não tem solucionário, procure aprender a resolver os problemas sozinho.

SOLUÇÃO 1

Como estamos avaliando o limite pela direita do 1, ou seja, números estritamente maiores do que 1, temos que $|x - 1| = x - 1$ e, portanto, podemos reescrever o limite como

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x + 1)(x - 1)}{(x - 1)} = \lim_{x \rightarrow 1^+} x + 1 = 1 + 1 = 2$$

SOLUÇÃO 2

Primeiramente, reescrevemos $\sqrt{x^2 - 1}$ como $\sqrt{(x + 1)(x - 1)}$ e distribuímos o denominador $\sqrt{x - 1}$:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{\sqrt{(x + 1)(x - 1)}}{\sqrt{x - 1}} + \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x - 1}} \right)$$

O primeiro termo se simplifica para $\sqrt{x + 1}$. Para o segundo termo, fatoramos o numerador multiplicando por $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} + 1}$ e aplicando a diferença de dois quadrados, resultando em:

$$\frac{x - 1}{\sqrt{x - 1}(\sqrt{x} + 1)}$$

Em seguida, multiplicamos o numerador e o denominador por $\sqrt{x - 1}$ para racionalizar e obtemos, após realizar a devida simplificação do numerador com o denominador (pois aparece um fator $x - 1$ em cima e em baixo):

$$\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1}$$

Aplicando o limite a cada termo separadamente:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x+1} + \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x}+1} = \sqrt{2} + 0 = \sqrt{2}$$

SOLUÇÃO 3

Para encontrar o limite quando x tende a infinito, podemos dividir o numerador e o denominador por x (note que no denominador podemos colocá-lo para dentro da raiz na forma de x^2):

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x+4}{\sqrt{2x^2-5}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{3x}{x} + \frac{4}{x}}{\sqrt{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{5}{x^2}}}$$

Simplificando, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3 + \frac{4}{x}}{\sqrt{2 - \frac{5}{x^2}}}$$

À medida que x tende a infinito, $\frac{4}{x}$ e $\frac{5}{x^2}$ tendem a 0, simplificando ainda mais a expressão:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3}{\sqrt{2}}$$

Portanto, o limite é $\frac{3}{\sqrt{2}}$.

SOLUÇÃO 4

Podemos reescrever a expressão usando identidades trigonométricas:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \tan(3x) \csc(6x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\cos(3x)} \cdot \frac{1}{\sin(6x)}$$

Observe que $\cos(3x)$ tende a 1 quando x tende a 0. Portanto, a expressão pode ser simplificada como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{\sin(6x)}$$

Usando o limite trigonométrico fundamental $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(ax)}{ax} = 1$, podemos reescrever a expressão como:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{6x} \cdot \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \frac{6x}{\sin(6x)}$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{1}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(3x)}{3x} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} \frac{6x}{\sin(6x)} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{2}$$

Portanto, o limite é $\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO 5

Reescrevendo a expressão usando identidades trigonométricas, temos:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\csc 3\theta}{\cot \theta} = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\sin 3\theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

À medida que θ tende a 0, $\cos \theta$ tende a 1. Assim, a expressão pode ser simplificada para:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\sin 3\theta}$$

Utilizando mais uma vez o limite trigonométrico fundamental $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin a\theta}{a\theta} = 1$, podemos reescrever a expressão como:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\theta}{3\theta} \cdot \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \frac{3\theta}{\sin 3\theta}$$

Após simplificar, obtemos:

$$\frac{1}{3} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} \cdot \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{3\theta}{\sin 3\theta} = \frac{1}{3} \cdot 1 \cdot 1 = \frac{1}{3}$$

Portanto, o limite é $\frac{1}{3}$.

SOLUÇÃO 6

Vamos primeiramente dividir o numerador e o denominador por ψ , o que nos dá:

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\frac{\tan^2 \psi}{\psi} + 2}{1 + \psi}$$

Sabemos que $\lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\tan \psi}{\psi} = 1$ (do limite trigonométrico fundamental), então podemos reescrever a expressão acima, utilizando o fato de que $\frac{\tan^2 \psi}{\psi} = \tan \psi \cdot \frac{\tan \psi}{\psi}$, o que nos dá:

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{\tan \psi \cdot \frac{\tan \psi}{\psi} + 2}{1 + \psi}$$

Como $\tan \psi \rightarrow 0$ quando $\psi \rightarrow 0$, a expressão pode ser simplificada para:

$$\lim_{\psi \rightarrow 0} \frac{0 \cdot 1 + 2}{1 + 0} = \frac{2}{1} = 2$$

Portanto, o valor do limite é 2.

SOLUÇÃO 7

Para resolver $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x(3x + \sin x)}{2x^2 - 5x \sin x + 1}$, podemos dividir numerador e denominador por x^2 , o termo de maior grau:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3 + \frac{\sin x}{x}}{2 - \frac{5 \sin x}{x} + \frac{1}{x^2}}$$

Quando $x \rightarrow \infty$, $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 0$ e $\frac{1}{x^2} \rightarrow 0$, então o limite se torna:

$$\frac{3 + 0}{2 - 0 + 0} = \frac{3}{2}$$

Portanto, o limite é $\frac{3}{2}$.

SOLUÇÃO 8

Para resolver $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2}{x+1} - x \right)$, podemos simplificar a expressão:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x(x+1)}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x^2 - x^2 - x}{x+1} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-x}{x+1} \right)$$

Dividindo o numerador e o denominador por x , obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{-1}{1 + \frac{1}{x}} \right) = \frac{-1}{1+0} = -1$$

SOLUÇÃO 9

Para resolver o limite, podemos multiplicar e dividir pelo termo $\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2}$, que faz aparecer uma diferença de dois cubos no numerador — lembre-se que $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[3]{x+1} - \sqrt[3]{x})(\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2})}{\sqrt[3]{(x+1)^2} + \sqrt[3]{x(x+1)} + \sqrt[3]{x^2}}$$

O numerador se torna $x+1-x=1$, e o denominador é uma soma de termos que divergem (vão ao infinito). Portanto, o limite é a razão entre 1 e infinito, que é zero.

SOLUÇÃO 10

Vamos inicialmente focar na simplificação do numerador e na racionalização do denominador de $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x^2-2x)\sin(x^2-4)}{\sqrt{x^2+4}-\sqrt{4x}}$.

O numerador $(x^2-2x)\sin(x^2-4)$ pode ser reescrito como $x(x-2)\sin((x-2)(x+2))$. Para racionalizar o denominador, multiplicamos e dividimos por sua conjugada $\sqrt{x^2+4} + \sqrt{4x}$, obtendo:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x(x-2)\sin((x-2)(x+2))(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{4x})}{(\sqrt{x^2+4} - \sqrt{4x})(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{4x})}$$

O denominador simplifica para x^2+4-4x , que pode ser reescrito como $(x-2)^2$. Portanto, a expressão se torna (após cancelar o $x-2$ do numerador com um dos que estão no denominador):

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x \sin((x-2)(x+2))(\sqrt{x^2+4} + \sqrt{4x})}{(x-2)}$$

Fazendo a substituição $u = x - 2$, encontramos:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{(u+2) \sin(u(u+4))(\sqrt{(u+2)^2+4} + \sqrt{4(u+2)})}{u}$$

Multiplicando em cima e em baixo por $(u+4)$, poderemos aplicar o limite trigonométrico fundamental ao termo

$$\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\sin(u(u+4))}{u(u+4)} = 1$$

e o restante da expressão no numerador poderá ser avaliada diretamente substituindo u por 0, resultando em:

$$(0+2)(0+4) \left(\sqrt{(0+2)^2+4} + \sqrt{4(0+2)} \right) = 32\sqrt{2}$$

SOLUÇÃO 11

Para encontrar o limite $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2}$, multiplicamos e dividimos pela expressão conjugada do numerador:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt[4]{x^4+1} - \sqrt{x^2+1}}{x^2} \cdot \frac{\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1}}{\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1}}$$

Isso resulta em:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 + 1 - (x^2 + 1)}{x^2(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^4 - x^2}{x^2(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})}$$

Simplificando, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2(x^2 - 1)}{x^2(\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1})} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{\sqrt[4]{x^4+1} + \sqrt{x^2+1}}$$

Como $x \rightarrow 0$, o limite se torna:

$$\frac{0^2 - 1}{\sqrt[4]{0^4+1} + \sqrt{0^2+1}} = \frac{-1}{1+1} = -\frac{1}{2}$$

Portanto, o valor do limite é $-\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO 12

Para calcular o limite $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}$, racionalizamos o numerador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}$$

Isso nos dá:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x + \sqrt{x} - x}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x + \sqrt{x}} + \sqrt{x}}$$

Dividindo em cima e em baixo por $\sqrt{x}$:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} + 1}$$

Como $x \rightarrow \infty$, $\frac{1}{\sqrt{x}} \rightarrow 0$, resultando em:

$$\frac{1}{\sqrt{1+0}+1} = \frac{1}{2}$$

Assim, o valor do limite é $\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO 13

Para resolver $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+3}{x+\sqrt[3]{x}}$, dividimos o numerador e o denominador por x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2x}{x} + \frac{3}{x}}{\frac{x}{x} + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 + \frac{3}{x}}{1 + \frac{\sqrt[3]{x}}{x}}$$

Conforme $x \rightarrow \infty$, $\frac{3}{x} \rightarrow 0$ e $\frac{\sqrt[3]{x}}{x} = \sqrt[3]{\frac{1}{x}} \rightarrow 0$, então o limite torna-se:

$$\frac{2+0}{1+0} = 2$$

Portanto, o valor do limite é 2.

SOLUÇÃO 14

Notemos que $1 - \tan x = \frac{\cos x - \sin x}{\cos x}$ ao usarmos $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$. Isso nos permite reescrever o limite como:

$$\lim_{x \rightarrow \pi/4} \frac{(\sin x - \cos x) \cos x}{\cos x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow \pi/4} -\cos x = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

SOLUÇÃO 15

Para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$, podemos usar a definição do número e , que é o limite de $(1 + \frac{1}{n})^n$ quando n tende ao infinito. Substituindo x por $\frac{1}{n}$, o limite que ia $x \rightarrow 0$ passa a ser $n \rightarrow \infty$. Assim, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = \lim_{n \rightarrow \infty} n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \ln(e) = 1$$

SOLUÇÃO 16

Utilizemos a propriedade dos logaritmos que nos permite combinar a diferença entre os logaritmos como o logaritmo da razão:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

Simplificando a fração dentro do logaritmo:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ln(e) = 1$$

SOLUÇÃO 17

Da definição da tangente hiperbólica, temos

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{e^x} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x}}}{1 + \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x}}} = 1$$

visto que $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{e^{2x}} \rightarrow 0$.

SOLUÇÃO 18

Para calcular $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{1 - \cos x}}$, utilizamos a identidade trigonométrica $1 - \cos x = 2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$, o que nos leva a:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{2 \sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}$$

Simplificando a expressão, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{2} \cdot \left| \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right|}$$

Considerando que x está se aproximando de 0 pelo lado positivo, podemos remover o valor absoluto, resultando em:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)}$$

Para utilizarmos a propriedade do limite fundamental $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, fazemos aparecer $x/2$ multiplicando o numerador e o denominador por 2:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x}{2\sqrt{2} \cdot \sin\left(\frac{x}{2}\right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}} = \sqrt{2}$$

SOLUÇÃO 19

Seja $y = \arcsin x \Rightarrow x = \sin y$. Quando $x \rightarrow 0$, temos também $y \rightarrow 0$. Reescrevendo o limite,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \arcsin x}{3x} = \lim_{y \rightarrow 0} \frac{2y}{3 \sin y}$$

Aplicando o limite trigonométrico fundamental,

$$\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\sin y}{y}} = \frac{2}{3}$$

SOLUÇÃO 20

Para determinar $\lim_{n \rightarrow a} \frac{n^2 + (1-a)n - a}{n-a}$, começamos por simplificar a expressão. Observe que o numerador é um polinômio quadrático que pode ser fatorado. Buscamos fatores de forma que $n^2 + (1-a)n - a = (n-a)(n+b)$, onde b é uma constante a ser determinada. Aplicando a fatoração, temos:

$$n^2 + (1-a)n - a = n^2 - an + bn - ab$$

Igualando os coeficientes, obtemos $b = 1$ e $ab = a$, o que é satisfeito para $b = 1$. Portanto, o numerador pode ser reescrito como $(n-a)(n+1)$. A expressão original do limite se torna:

$$\lim_{n \rightarrow a} \frac{(n-a)(n+1)}{n-a}$$

Podemos cancelar o termo $(n-a)$ no numerador e no denominador, desde que $n \neq a$. Isso nos deixa com:

$$\lim_{n \rightarrow a} (n+1) = a+1$$

Portanto, o valor do limite é $a+1$.

SOLUÇÃO 21

Vamos escrever o limite da forma seguinte:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{3 \sec x} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{3}{\cos x}}$$

Façamos a mudança de variável $u = \cos x$ de forma que quando $x \rightarrow \pi/2$ temos $u \rightarrow 0$. Assim,

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (1 + \cos x)^{\frac{3}{\cos x}} = \lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{3}{u}} = \left(\lim_{u \rightarrow 0} (1 + u)^{\frac{1}{u}} \right)^3 = e^3$$

onde usamos o limite que define o número de Euler.

SOLUÇÃO 22

Para mostrar que $\lim_{x \rightarrow 0} \left[\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} \right] = 1$, vamos manipular a expressão dentro do limite.

$$\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\sin \alpha x - \sin \beta x} = \frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha x \frac{\sin \alpha x}{\alpha x} - \beta x \frac{\sin \beta x}{\beta x}}$$

No limite $x \rightarrow 0$, as razões dos senos com os termos polinomiais dá 1, pelo limite trigonométrico fundamental. Com essa simplificação, a expressão dentro do limite se torna

$$\frac{e^{\alpha x} - e^{\beta x}}{\alpha x - \beta x}$$

Somando e subtraindo 1 no numerador e distribuindo o denominador pelos pares que passam a constituir o numerador, temos

$$\frac{e^{\alpha x} - 1}{x(\alpha - \beta)} - \frac{e^{\beta x} - 1}{x(\alpha - \beta)}$$

Aplicando agora o limite na expressão resultante, encontramos

$$\frac{1}{(\alpha - \beta)} \left[\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\alpha x} - 1}{x} - \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{\beta x} - 1}{x} \right]$$

Porém, os limites em questão constituem um dos limites exponenciais fundamentais, que diz que

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{kx} - 1}{x} = k, \quad \forall k \in \mathbb{R}$$

Por essa razão, a expressão simplifica para

$$\frac{1}{(\alpha - \beta)} \cdot (\alpha - \beta) = 1$$

SOLUÇÃO 23

Queremos resolver

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[a^{\frac{1}{n}} - 1 \right]$$

Façamos a mudança de variável $y = a^{1/n}$, de tal forma que $\ln(y) = \frac{1}{n} \ln(a)$ ou ainda $n = \frac{\ln(a)}{\ln(y)}$. Isso implica que conforme $n \rightarrow \infty$ temos $y \rightarrow 1$. Com essa mudança, o limite passa a ser escrito da forma seguinte:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[a^{\frac{1}{n}} - 1 \right] = \lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln(a)}{\ln(y)} (y - 1) = \ln(a) \cdot \frac{1}{\lim_{y \rightarrow 1} \frac{\ln y}{y-1}}$$

Fazendo mais uma mudança de variável de modo que $u = y - 1$, temos que quando $y \rightarrow 1$ a variável $u \rightarrow 0$ e então o limite passa a ser escrito como

$$\ln(a) \cdot \frac{1}{\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(u+1)}{u}}$$

onde este último é um dos limites logarítmicos fundamentais que tende a 1 conforme $u \rightarrow 0$. Assim, concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} n \left[a^{\frac{1}{n}} - 1 \right] = \ln(a)$$

SOLUÇÃO 24

Vamos reescrever o limite, multiplicando em cima e em baixo por x , para fazer aparecer o limite trigonométrico fundamental:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow \infty} \left[(\sqrt{x^2 + 1} - x) \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] \cdot \frac{x}{x} \\ = \left[\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{x} \right] \cdot \left[\lim_{x \rightarrow \infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) \right] \end{aligned}$$

O segundo colchetes vai a 1 no limite, porque constitui o limite trigonométrico fundamental. Nos resta analisar o limite no primeiro colchetes:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt{x^2 + 1} - x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}{x}$$

Como estamos trabalhando com $x \rightarrow -\infty$, temos que $|x| = -x$ e, portanto, a expressão simplifica para

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} -\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1 = -2$$

uma vez que $\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} = 1$.

SOLUÇÃO 25

O termo $\sin\left(\frac{1}{\psi-1}\right)^3$ oscila entre -1 e 1 para qualquer valor real do seu argumento. Então, podemos usar o Teorema do Confronto para estabelecer duas funções que limitam a nossa função original:

$$-1 \leq \sin\left(\frac{1}{\psi-1}\right)^3 \leq 1$$

Multiplicando cada parte da desigualdade por $(\psi^2 - 1)^3$, temos:

$$-(\psi^2 - 1)^3 \leq (\psi^2 - 1)^3 \sin\left(\left(\frac{1}{\psi-1}\right)^3\right) \leq (\psi^2 - 1)^3$$

Quando ψ tende a 1, tanto $-(\psi^2 - 1)^3$ quanto $(\psi^2 - 1)^3$ tendem a 0. Assim, pelo Teorema do Confronto, temos:

$$\lim_{\psi \rightarrow 1} (\psi^2 - 1)^3 \sin\left(\left(\frac{1}{\psi-1}\right)^3\right) = 0.$$

SOLUÇÃO 26

Para calcular o limite

$$\lim_{k \rightarrow 1} \left[(k-1)^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k-1}} \right],$$

utilizamos o Teorema do Confronto. Sabendo que $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ para todo x , multiplicamos essa desigualdade por $(k-1)^2$, que tende a 0 quando k tende a 1, portanto

$$-(k-1)^2 \leq (k-1)^2 \sin \frac{1}{\sqrt[3]{k-1}} \leq (k-1)^2,$$

e pelo Teorema do Confronto, o limite é 0.

SOLUÇÃO 27

Podemos racionalizar o numerador multiplicando e dividindo pelo conjugado:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1+x^2}-1)(\sqrt{x+1+x^2}+1)}{x(\sqrt{x+1+x^2}+1)}$$

Expandindo o numerador, temos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x+1+x^2-1}{x(\sqrt{x+1+x^2}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(1+x)}{x(\sqrt{x+1+x^2}+1)}$$

Simplificando x e calculando o limite, obtemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x}{\sqrt{x+1+x^2}+1} = \frac{1}{2}$$

Portanto, o valor do limite é $\frac{1}{2}$.

SOLUÇÃO 28

Primeiro fatoramos o numerador como de costume (multiplicando em cima e em baixo pelo conjugado) e simplificamos:

$$\lim_{n \rightarrow 0} \left[\frac{n(1+n)}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1+n^2}+1)} \cdot \sin \frac{1}{n} \right]$$

Separando o limite, temos:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow 0} \frac{n(1+n)}{\sqrt{n}(\sqrt{n+1+n^2}+1)} \cdot \lim_{n \rightarrow 0} \sin \frac{1}{n} \\ = \lim_{n \rightarrow 0} \frac{\sqrt{n}(1+n)}{(\sqrt{n+1+n^2}+1)} \cdot \lim_{n \rightarrow 0} \sin \frac{1}{n} \end{aligned}$$

O primeiro limite dá 0 e $\sin \frac{1}{n}$ está entre -1 e 1 . Assim, o limite do produto é 0.

SOLUÇÃO 29

Avaliemos o limite

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\phi^2(1 + \sin^2 \phi)}{(\phi + \sin \phi)^2}$$

Observe a expressão no denominador $(\phi + \sin \phi)^2$. Podemos expandi-la para $\phi^2 + 2\phi \sin \phi + \sin^2 \phi$. Feito isso, podemos dividir por ϕ^2 em cima e em baixo,

$$\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{1 + \sin^2 \phi}{1 + 2 \frac{\sin \phi}{\phi} + \frac{\sin^2 \phi}{\phi^2}}$$

Sabendo que $\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin \phi}{\phi} = 1$ e $\lim_{\phi \rightarrow 0} \frac{\sin^2 \phi}{\phi^2} = 1$, substituímos esses valores na expressão para encontrar o limite:

$$\frac{1 + 0}{1 + 2 \cdot 1 + 1} = \frac{1}{4}$$

SOLUÇÃO 30

Consideremos o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^n x (\sqrt{1 + x^2} - 1)}{x^3 + x^4}.$$

Para que o limite seja finito e não nulo, precisamos que o numerador e o denominador tenham o mesmo “grau” quando $x \rightarrow 0$.

Observamos que o termo $\sqrt{1 + x^2} - 1$ se aproxima de 0 mais rapidamente do que uma função linear, mas menos rapidamente do que x^2 . Isso pode ser visto ao racionalizar o termo:

$$\sqrt{1 + x^2} - 1 = \frac{x^2}{\sqrt{1 + x^2} + 1},$$

que se comporta como x^2 para x pequeno (pois o denominador vai a 2 no limite). O denominador $x^3 + x^4$ é dominado por x^3 quando $x \rightarrow 0$ (pois x^4 cai mais rápido). Portanto, precisamos ajustar o numerador para que ele também seja dominado por x^3 . Isso significa que o termo $\sin^n x$ deve contribuir com um fator de x ao numerador, tornando $n = 1$ a escolha adequada, já que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

e para esse limite aparecer precisamos multiplicar em cima e em baixo por x , de forma que o que aparecerá em baixo entra no limite fundamental e o que aparece em cima se junta ao x^2 para se tornar x^3 , como desejado. Assim, para $n = 1$, ao racionalizar encontramos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x(\sqrt{1+x^2}-1)}{x^3+x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{x^3}{x^3(1+x)(\sqrt{1+x^2}+1)} = \frac{1}{2}$$

Portanto, $n = 1$ é o valor que faz o limite ser finito e não nulo, com o valor do limite sendo 1.

SOLUÇÃO 31

Para determinar o perímetro $P(n)$ de um polígono regular inscrito em uma circunferência de raio r , consideramos o triângulo formado por dois vértices consecutivos e o centro do círculo.

O ângulo no centro é $\frac{2\pi}{n}$ e o lado do polígono é $2r \sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ — trace a bissetriz do ângulo central, que também será mediatriz do lado do polígono, por trigonometria o lado do polígono será a soma das duas metades e cada uma delas é $r \sin(\pi/n)$. Assim, o perímetro é

$$P(n) = n \cdot 2r \sin\left(\frac{\pi}{n}\right).$$

O limite do perímetro quando o número de lados tende ao infinito é

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi r \frac{n}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) = 2\pi r \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{\pi}{n}}$$

Usando o limite trigonométrico fundamental, encontramos a circunferência:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(n) = 2\pi r$$

SOLUÇÃO 32

Para calcular o limite, primeiramente faremos x^2 de ambos os polinômios, o do numerador e do denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{x^2 \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}$$

Com isso, podemos simplificar x^2 e teremos ao tirar o limite de cada termo:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2}\right)}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1 - 0 + 0}{3 + 0 + 0}$$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 2x + 3}{3x^2 + x + 1} = \frac{1}{3}$$

SOLUÇÃO 33

Primeiramente, faremos x do numerador e do denominador:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right]^x$$

Simplificando x e separando em duas potências de x :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{x \left(1 + \frac{2}{x}\right)}{x \left(1 + \frac{1}{x}\right)} \right]^x = \frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x}$$

Notemos que aparecem os limites fundamentais de e tanto no numerador quanto no denominador, assim, temos:

$$\frac{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{x}\right)^x}{\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x} = \frac{e^2}{e}$$

Portanto:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x+2}{x+1} \right)^x = e$$

SOLUÇÃO 34

Temos para uma soma infinita dos termos de uma PG qualquer e de razão a :

$$\sum_{k=0}^n a^k = 1 + a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1}$$

Então, para a somatória partindo de 1, teremos:

$$\sum_{k=1}^n a^k = a + a^2 + a^3 + \dots + a^n = \sum_{k=0}^n a^k - 1$$

Assim:

$$\sum_{k=1}^n a^k = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} - 1 = \frac{a^{n+1} - 1}{a - 1} - \frac{a - 1}{a - 1} = \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}$$

Logo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} - a}{a - 1}$$

Aplicando a condição de $0 < a < 1$, então a elevado ao infinito irá convergir para zero:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{n+1} - a}{a - 1} = \frac{0 - a}{a - 1} = \frac{-a}{a - 1} = \frac{a}{1 - a}$$

Assim, provamos o que foi pedido:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n a^k = \frac{a}{1 - a}$$

SOLUÇÃO 35

Consideremos a seguinte propriedade das funções exponenciais e logarítmicas:

$$A^B = e^{\ln(A^B)} = e^{B \ln(A)}$$

Dessa forma, podemos reescrever a^h como $e^{\ln(a^h)} = e^{h \ln(a)}$. Assim, a expressão a ser tomada o limite pode ser escrita como:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \ln(a)} - 1}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{h \ln(a)} - 1}{h}$$

Para simplificar o cálculo desse limite, consideramos a substituição:

$$u = e^{h \ln(a)} - 1 \implies e^{h \ln(a)} = u + 1$$

Ao tomarmos o logaritmo natural dos dois lados dessa última expressão, obtemos:

$$h \ln(a) = \ln(u + 1)$$

o que nos permite isolar h em termos de u :

$$h = \frac{\ln(u + 1)}{\ln(a)}$$

Substituindo h e a^h na expressão original do limite, obtemos:

$$\frac{a^h - 1}{h} = \frac{u}{\frac{\ln(u+1)}{\ln(a)}} = \frac{u \ln(a)}{\ln(u + 1)}$$

Dividindo o numerador e o denominador por u e usando a propriedade dos logaritmos, chegamos a:

$$\frac{u \ln(a)}{\ln(u + 1)} = \frac{\ln(a)}{\ln((u + 1)^{1/u})}$$

Finalmente, observando que, quando $h \rightarrow 0$, temos $u \rightarrow 0$ também, podemos avaliar o limite de interesse:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(a)}{\ln((u + 1)^{1/u})}$$

Esse limite do denominador é um caso fundamental, pois reconhecemos que:

$$\lim_{u \rightarrow 0} \ln\left((u + 1)^{\frac{1}{u}}\right) = \ln(e) = 1$$

Assim, temos finalmente:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h} = \ln(a)$$

SOLUÇÃO 36

Temos $f(u) = u^2 + 5u + 5$ e $g(x) = \frac{x+1}{x-1}$. Usando a regra da cadeia, temos que

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

onde $f'(u) = 2u + 5$ e $g'(x) = \frac{-2}{(x-1)^2}$ (este último, pela regra do quociente). Assim,

$$(f \circ g)'(x) = (2g(x) + 5) \cdot g'(x) = \left(2 \frac{x+1}{x-1} + 5\right) \left(\frac{-2}{(x-1)^2}\right) = \frac{6-14x}{(x-1)^3}$$

SOLUÇÃO 37

Para encontrar a derivada de $f(x) = \frac{x+1}{x \ln x}$, utilizamos a regra do quociente, que é dada por $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$, onde $u = x+1$ e $v = x \ln x$. Primeiro, derivamos u e v separadamente:

1. Derivada de u :

$$u' = \frac{d}{dx}(x+1) = 1$$

2. Derivada de v : Para $v = x \ln x$, usamos a regra do produto, $(fg)' = f'g + fg'$, onde $f = x$ e $g = \ln x$:

$$v' = \frac{d}{dx}(x \ln x) = \frac{d}{dx}(x) \cdot \ln x + x \cdot \frac{d}{dx}(\ln x) = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$$

Agora, aplicamos a regra do quociente:

$$f'(x) = \frac{u'v - uv'}{v^2} = \frac{1 \cdot (x \ln x) - (x+1)(\ln x + 1)}{(x \ln x)^2}$$

Simplificando:

$$f'(x) = \frac{x \ln x - x \ln x - \ln x - x - 1}{x^2(\ln x)^2} = \frac{-\ln x - x - 1}{x^2(\ln x)^2}$$

Assim, a derivada de $f(x)$ é:

$$f'(x) = \frac{-\ln x - x - 1}{x^2(\ln x)^2}$$

SOLUÇÃO 38

A função $\phi(t)$ é composta por duas funções logarítmicas. Vamos derivar cada uma separadamente, aplicando a regra da cadeia.

Para o termo $\ln(\sqrt{1+e^t}-1)$, definimos $u = \sqrt{1+e^t}-1$. A derivada de $\sqrt{1+e^t}$ em relação a t é $\frac{1}{2\sqrt{1+e^t}} \cdot e^t$ (onde aqui também aplicamos a regra da cadeia, porque temos uma exponencial dentro de uma raiz, isto é, uma composição de funções), então $u' = \frac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}}$ (o termo -1 some porque é constante). A derivada do $\ln u$ é $\frac{1}{u} \cdot u'$.

Para $\ln(\sqrt{1+e^t}+1)$, com $v = \sqrt{1+e^t}+1$, a derivada de v é a mesma que a de u , pois a adição de 1 não afeta a derivada. Assim, $v' = \frac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}}$, e a derivada do logaritmo de v é $\frac{1}{v} \cdot v'$.

Portanto, a derivada de $\phi(t)$ é a diferença das derivadas dos dois termos logarítmicos:

$$\phi'(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^t}-1} \cdot \frac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}} \right) - \left(\frac{1}{\sqrt{1+e^t}+1} \cdot \frac{e^t}{2\sqrt{1+e^t}} \right)$$

Simplificando, chegamos a

$$\phi'(t) = \frac{1}{\sqrt{1+e^t}}$$

SOLUÇÃO 39

Para derivar $h(x) = a^{\tan(nx)}$, usamos a regra da cadeia considerando $u = \tan(nx)$. A derivada de u em relação a x é $u' = n \sec^2(nx)$. A função $h(x)$ é uma função exponencial com base a , então sua derivada em relação a u é $h'(u) = a^u \ln(a)$.

Aplicando a regra da cadeia, a derivada de $h(x)$ é $h'(x) = h'(u) \cdot u' = a^{\tan(nx)} \ln(a) \cdot n \sec^2(nx)$.

SOLUÇÃO 40

A primeira derivada de $f(x) = \ln x$ é $f'(x) = \frac{1}{x}$. Para encontrar a segunda derivada, aplicamos a regra de diferenciação para potências de x , obtendo $f''(x) = -\frac{1}{x^2}$. Analogamente, a terceira derivada é $f'''(x) = \frac{1 \cdot 2}{x^3}$ e a quarta derivada é $f''''(x) = -\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{x^4}$.

Podemos observar um padrão nas derivadas sucessivas: a n -ésima derivada de $f(x)$ envolve o fatorial do grau da derivada menos um e alterna o sinal. Portanto, para $n \geq 1$, temos:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1} \cdot \frac{(n-1)!}{x^n}$$

SOLUÇÃO 41

Para mostrar que $S_n^{(k)}(x) = k! \binom{n}{k} x^{n-k}$, começamos com a função $S_n(x) = x^n$. A k -ésima derivada de $S_n(x)$, denotada por $S_n^{(k)}(x)$, é obtida derivando $S_n(x)$ k vezes. Ao derivar x^n uma vez, obtemos $n x^{n-1}$. Derivando novamente, obtemos $(n)(n-1)x^{n-2}$, e assim por diante, até a k -ésima derivada. Após k derivações, a expressão torna-se:

$$S_n^{(k)}(x) = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)x^{n-k}$$

Podemos reescrever isso como:

$$S_n^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!} x^{n-k}$$

Da análise combinatória, sabemos que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$. Portanto, podemos substituir na expressão da derivada para obter:

$$S_n^{(k)}(x) = k! \binom{n}{k} x^{n-k}$$

Essa é a expressão desejada, provando a afirmação.

SOLUÇÃO 42

Para provar a fórmula de Leibniz para a derivada n -ésima do produto de duas funções, $f(x)$ e $g(x)$, procedemos por indução matemática sobre n .

Base da indução ($n=1$): A fórmula de Leibniz para $n = 1$ se reduz à regra do produto para derivadas, isto é, $(f \cdot g)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$, o que é verdadeiro pela regra do produto.

Passo de indução: Suponha que a fórmula de Leibniz seja válida para algum $n \geq 1$, isto é, que

$$(f \cdot g)^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

seja verdadeiro. Precisamos mostrar que a fórmula também é válida para $n + 1$, ou seja,

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

Para isso, derivamos ambos os lados da suposição de indução:

$$\frac{d}{dx} ((f \cdot g)^{(n)}(x)) = \frac{d}{dx} \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \right)$$

Aplicando a regra do produto na derivada do lado direito, obtemos:

$$\begin{aligned} (f \cdot g)^{(n+1)}(x) &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k+1)}(x) g^{(n-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k+1)}(x) \\ &= \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) + \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \end{aligned}$$

Note que no primeiro somatório, reindexamos com $k \rightarrow k + 1$, o que muda os limites de soma para $k = 1$ até $n + 1$. Agora, podemos combinar os dois somatórios notando que eles compartilham termos comuns para $1 \leq k \leq n$. O termo $k = 0$ do segundo somatório e o termo $k = n + 1$ do primeiro somatório são tratados separadamente, pois eles não têm termos correspondentes no outro somatório:

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)^{(n+1)}(x) &= \binom{n}{0} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\
 &\quad + \binom{n}{n} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x)
 \end{aligned}$$

A expressão acima tem três partes: o termo inicial, a soma dos termos intermediários e o termo final. Para simplificar essa expressão, usamos a propriedade dos coeficientes binomiais, conhecida como identidade de Pascal, que afirma que $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$. Aplicando esta propriedade nos termos intermediários da soma, obtemos:

$$\sum_{k=1}^n \left[\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right] f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) = \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

Agora, incorporamos o termo inicial e o termo final na soma, reconhecendo que $\binom{n}{0} = \binom{n+1}{0}$ e $\binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1}$, o que nos permite escrever:

$$\begin{aligned}
 (f \cdot g)^{(n+1)}(x) &= \binom{n+1}{0} f^{(0)}(x) g^{(n+1)}(x) \\
 &\quad + \sum_{k=1}^n \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x) \\
 &\quad + \binom{n+1}{n+1} f^{(n+1)}(x) g^{(0)}(x)
 \end{aligned}$$

Combinando todos os termos em uma única soma, temos:

$$(f \cdot g)^{(n+1)}(x) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} f^{(k)}(x) g^{(n+1-k)}(x)$$

Assim, concluímos que a fórmula de Leibniz é válida para $n+1$, completando o passo de indução e provando a validade da fórmula para qualquer $n \geq 1$.

SOLUÇÃO 43

Para verificar a equação $\frac{d^2 y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + 2y = 0$, onde $y = e^x \cos x$, começamos calculando a primeira derivada de y :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} = e^x \cos x - e^x \sin x$$

Então, calculamos a segunda derivada:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} = -2e^x \sin x$$

Substituindo as derivadas na equação diferencial, obtemos:

$$(-2e^x \sin x) - 2(e^x \cos x - e^x \sin x) + 2(e^x \cos x) = 0$$

Simplificando, vemos que a equação é satisfeita, confirmando que $y = e^x \cos x$ é uma solução da equação diferencial dada.

SOLUÇÃO 44

A função é $\psi(t) = \frac{te^{2t}}{\ln(3t+1)}$. Primeiro, encontramos a primeira derivada $\psi'(t)$ utilizando a regra do quociente, onde precisamos usar a regra do produto para a derivada do termo te^{2t} e também da regra da cadeia no termo $\ln(3t+1)$. Simplificando, obtemos:

$$\psi'(t) = e^{2t} \frac{(6t^2 + 5t + 1)\log(3t+1) - 3t}{(3t+1)\log^2(3t+1)}$$

Para encontrar $\psi''(t)$, derivamos $\psi'(t)$ em relação a t . Este passo envolve a aplicação repetida da regra do produto, da regra do quociente e da regra da cadeia. Após a derivação e simplificação, chegamos ao resultado final para $\psi''(t)$:

$$\psi'' = e^{2t} \frac{-3(12t^2 + 7t + 2)\ln(3t+1) + 18t + 4(t+1)(3t+1)^2 \ln^2(3t+1)}{(3t+1)^2 \ln^3(3t+1)}$$

SOLUÇÃO 45

Consideramos a função $g(x) = \ln \left[\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} \right] + 2 \arctan(\sqrt{\sin x})$. A derivada de $g(x)$, $g'(x)$, é calculada como segue:

$$g'(x) = \frac{d}{dx} \left(\ln \left[\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} \right] \right) + 2 \frac{d}{dx} \left(\arctan(\sqrt{\sin x}) \right)$$

Para o primeiro termo, usamos a regra da cadeia na função logarítmica e a regra do quociente internamente:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\ln \left[\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} \right] \right) &= \frac{1}{\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}}} \cdot \frac{d}{dx} \left(\frac{1+\sqrt{\sin x}}{1-\sqrt{\sin x}} \right) \\ &= \frac{1-\sqrt{\sin x}}{1+\sqrt{\sin x}} \cdot \left(\frac{\frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x (1-\sqrt{\sin x}) + (1+\sqrt{\sin x}) \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x}{(1-\sqrt{\sin x})^2} \right) \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}(1-\sin x)} \end{aligned}$$

Para o segundo termo, aplicamos a regra da cadeia na função arco tangente:

$$\begin{aligned} 2 \frac{d}{dx} \left(\arctan(\sqrt{\sin x}) \right) &= 2 \cdot \frac{1}{1+(\sqrt{\sin x})^2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\sin x}} \cos x \\ &= \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}(1+\sin x)} \end{aligned}$$

Combinando ambos os termos, temos:

$$g'(x) = \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}(1-\sin x)} + \frac{\cos x}{\sqrt{\sin x}(1+\sin x)} = \frac{2 \sec x}{\sqrt{\sin x}}$$

SOLUÇÃO 46

Dada a elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a equação da reta tangente no ponto (x_0, y_0) pode ser encontrada derivando implicitamente a equação da elipse em relação a x :

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

Resolvendo para $\frac{dy}{dx}$, temos:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x}{y}$$

Substituindo o ponto (x_0, y_0) na derivada, obtemos a inclinação m da reta tangente:

$$m = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0}$$

A equação da reta tangente com inclinação m que passa pelo ponto (x_0, y_0) é:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

Substituindo o valor de m , obtemos:

$$y - y_0 = -\frac{b^2}{a^2} \frac{x_0}{y_0} (x - x_0)$$

Esta é a equação da reta tangente à elipse no ponto (x_0, y_0) .

SOLUÇÃO 47

Para a curva $y^2 = 2x^3$, a inclinação da tangente no ponto (x, y) é obtida derivando implicitamente:

$$2y \frac{dy}{dx} = 6x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{6x^2}{2y} = \frac{3x^2}{y}$$

A reta tangente é perpendicular à reta $4x - 3y + 2 = 0$, cuja inclinação é $\frac{4}{3}$. Para serem perpendiculares, as inclinações devem satisfazer:

$$m \cdot \frac{4}{3} = -1$$

Substituindo $m = \frac{3x^2}{y}$:

$$\frac{3x^2}{y} \cdot \frac{4}{3} = -1$$

$$x^2 = -\frac{y}{4} \implies 16x^4 = y^2$$

Substituindo $y^2 = 2x^3$ em $16x^4 = y^2$, obtemos:

$$16x^4 = 2x^3 \implies 8x^4 = x^3$$

Temos que $x = 0$ é solução e, se consideramos $x \neq 0$, a equação simplifica para

$$8x = 1 \implies x = \frac{1}{8}$$

também é solução. Voltando em $y^2 = 2x^3$, explicitamos os valores de y que caracterizarão os pontos candidatos que estamos procurando:

$$y = \pm\sqrt{2x^3}$$

para $x = 0$ temos $y = 0$ correspondente e para $x = 1/8$ temos $y = \pm 1/16$. A solução $(0, 0)$ não serve pois a derivada é indefinida nesse ponto (olhe o que ocorre com $\frac{dy}{dx}$ quando $y = 0$), portanto deve ser descartada. Além disso, vimos que para as retas serem perpendiculares, deve ser satisfeita a relação

$$x^2 = -\frac{y}{4}$$

que só ocorre para $y < 0$. Portanto, o único ponto que satisfaz todas as condições é $P = (1/8, -1/16)$.

Nesse exercício encontramos algumas soluções anômalas que precisaram ser descartadas. É natural se perguntar o porquê de precisarmos fazer isso, dado que elas satisfazem algumas das equações que resolvemos. Ocorre que em um dos passos da nossa resolução foi necessário transformar $x^2 = -\frac{y}{4} \implies 16x^4 = y^2$, aumentando o grau da equação e fazendo aparecer soluções anômalas. Sempre que esse processo ocorrer em resoluções, é esperado que você encontrará algumas soluções indesejadas que irá descartar.

SOLUÇÃO 48

Dada a hipérbole $4x^2 - 9y^2 = 36$, derivamos implicitamente para encontrar a inclinação m da tangente em qualquer ponto (x, y) :

$$8x - 18y \frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{8x}{18y} = \frac{4x}{9y}$$

As tangentes devem ser perpendiculares à reta $2y + 5x = 10$, cuja inclinação é $-\frac{5}{2}$. Portanto, suas inclinações devem satisfazer $m \cdot (-\frac{5}{2}) = -1$. Assim:

$$\frac{4x}{9y} \cdot \left(-\frac{5}{2}\right) = -1$$

$$x = \frac{9y}{10} \iff y = \frac{10}{9}x$$

Substituímos em $4x^2 - 9y^2 = 36$:

$$4x^2 - 9\left(\frac{10}{9}\right)^2 x^2 = 36 \implies 4x^2 - \frac{100}{9}x^2 = 36 \implies x^2 - \frac{25}{9}x^2 = 9$$

$$\therefore \frac{-16}{9}x^2 = 9 \implies x^2 = -\frac{81}{16}$$

como não existem soluções reais para essa equação, segue que não existem retas tangentes à curva dada que sejam perpendiculares à reta dada.

SOLUÇÃO 49

Para a curva $\sqrt[3]{xy} = 14x + y$, a inclinação da tangente no ponto $(2, -32)$ é encontrada derivando implicitamente a equação:

$$\frac{1}{3}(xy)^{-2/3}(y + x \frac{dy}{dx}) = 14 + \frac{dy}{dx}$$

Substituindo $x = 2$ e $y = -32$, resolvemos para $\frac{dy}{dx}$:

$$\frac{1}{3}(2 \cdot (-32))^{-2/3}(-32 + 2\frac{dy}{dx}) = 14 + \frac{dy}{dx}$$

Primeiro, calculamos o termo $(2 \cdot (-32))^{-2/3}$:

$$2 \cdot (-32) = -64 \Rightarrow (-64)^{-2/3} = \frac{1}{16}$$

Substituindo de volta:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{16}(-32 + 2\frac{dy}{dx}) = 14 + \frac{dy}{dx}$$

Simplificando o termo do lado esquerdo:

$$\frac{-32}{48} + \frac{2}{48}\frac{dy}{dx} = 14 + \frac{dy}{dx}$$

Multiplicando tudo por 48 para eliminar os denominadores:

$$-32 + 2\frac{dy}{dx} = 672 + 48\frac{dy}{dx}$$

Isolando $\frac{dy}{dx}$:

$$\begin{aligned} -32 - 672 &= 48\frac{dy}{dx} - 2\frac{dy}{dx} \\ -704 &= 46\frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{704}{46} = -\frac{352}{23} \end{aligned}$$

Portanto, a inclinação da tangente $m = \frac{dy}{dx} = -\frac{352}{23}$. Usamos agora a fórmula da reta tangente ao ponto $(2, -32)$:

$$y + 32 = -\frac{352}{23}(x - 2)$$

SOLUÇÃO 50

Para a curva $y^3 + x y + x^3 = 0$, a inclinação da reta tangente no ponto (x_0, y_0) é encontrada derivando implicitamente a equação:

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + y + x \frac{dy}{dx} + 3x^2 = 0$$

$$(3y^2 + x) \frac{dy}{dx} = -y - 3x^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-y - 3x^2}{3y^2 + x}$$

A reta paralela a $x + y = 1$ tem inclinação -1 , logo $\frac{dy}{dx} = -1$. Portanto:

$$\frac{-y - 3x^2}{3y^2 + x} = -1$$

$$-y - 3x^2 = -3y^2 - x \implies 3(x^2 - y^2) = (x - y) \implies 3(x + y)(x - y) = (x - y)$$

Temos que $x = y$ é uma solução e, se consideramos $x \neq y$, a equação simplifica para

$$3(x + y) = 1 \implies y = -x + \frac{1}{3}$$

Essas duas relações entre x e y irão satisfazer o fato da reta tangente à curva dada ser paralela a reta $x + y = 1$. Ocorre que como queremos $x_0 < 0$ e $y_0 < 0$, note que para um dado $x_0 < 0$ a relação $y_0 = -x_0 + 1/3$ iria impor $y_0 > 0$. Portanto, vamos desconsiderá-la para os efeitos do que desejamos encontrar. Segue que a solução útil para nós é a que impõe $x = y$. Em particular, para todo $(x_0, y_0) = (x_0, x_0)$, com $x_0 \in \mathbb{R}$, que pertencer à curva dada, teremos que a reta tangente à curva nesse ponto também será paralela à reta $x + y = 1$.

Resta encontrarmos os pontos na curva que satisfazem $x = y$ tal que $x, y < 0$. Para isso, voltamos em

$$y^3 + xy + x^3 = 0 \implies 2x_0^3 + x_0^2 = 0 \implies 2x_0 + 1 = 0 \implies x_0 = -\frac{1}{2} = y_0$$

Com efeito, a equação da reta tangente procurada é dada por

$$y - y_0 = m(x - x_0) \therefore y + \frac{1}{2} = -\left(x + \frac{1}{2}\right)$$

onde enfatizo que $m = -1$ veio da relação de paralelismo com $x + y = 1$.

SOLUÇÃO 51

Sejam as retas tangentes à parábola $y = ax^2$ nos pontos $P_1(x_1, ax_1^2)$ e $P_2(x_2, ax_2^2)$. A equação da tangente à parábola no ponto (x_0, y_0) é dada por $y - y_0 = m(x - x_0)$, onde $m = f'(x_0) = 2ax_0$.

Portanto, as equações das tangentes são:

$$y - ax_1^2 = 2ax_1(x - x_1) \quad (\text{Tangente em } P_1)$$

$$y - ax_2^2 = 2ax_2(x - x_2) \quad (\text{Tangente em } P_2)$$

Igualando as duas equações para encontrar o ponto de interseção I :

$$ax_1^2 + 2ax_1(x - x_1) = ax_2^2 + 2ax_2(x - x_2) \implies 2ax_1x - ax_1^2 = 2ax_2x - ax_2^2$$

$$2ax_2x - 2ax_1x = ax_2^2 - ax_1^2 \implies 2x(x_2 - x_1) = x_2^2 - x_1^2$$

$$x = \frac{x_2^2 - x_1^2}{2(x_2 - x_1)} \implies x = \frac{(x_2 - x_1)(x_2 + x_1)}{2(x_2 - x_1)} \implies x = \frac{(x_2 + x_1)}{2}$$

Observamos que a abscissa do ponto de interseção I é o ponto médio das abscissas dos pontos de tangência P_1 e P_2 . Portanto, o ponto de interseção I está contido numa reta vertical que passa pelo ponto médio de P_1 e P_2 .

SOLUÇÃO 52

Dada a equação implícita $(x^2 + y^2)^2 = \frac{25}{3}(y^2 - x^2)$, para encontrar a inclinação da tangente no ponto $(-1, 2)$, derivamos implicitamente em relação a x :

$$2(x^2 + y^2)(2x + 2y \frac{dy}{dx}) = \frac{25}{3}(2y \frac{dy}{dx} - 2x)$$

Substituímos $x = -1$ e $y = 2$:

$$4((-1)^2 + 2^2)((-1) + (2)\frac{dy}{dx}) = \frac{25}{3}(2(2)\frac{dy}{dx} - 2(-1))$$

Simplificamos e resolvemos para $\frac{dy}{dx}$, encontrando $\frac{dy}{dx} = 11/2$. A inclinação da reta $11x - 2y + 3 = 0$ é $m = \frac{11}{2}$. De fato, vemos que o coeficiente angular da reta tangente que encontramos é igual ao coeficiente angular da reta dada, portanto são paralelas.

SOLUÇÃO 53

Para a parábola $y = 3x^2 - 2x$, com $x(t)$ e $y(t)$ sendo funções deriváveis do tempo t , queremos encontrar o ponto onde $\frac{dy}{dt} = 3\frac{dx}{dt}$. Diferenciando $y(t)$ em relação ao tempo t , obtemos:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(3x^2 - 2x) = 6x \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dx}{dt}$$

Agora, igualamos $\frac{dy}{dt}$ a $3\frac{dx}{dt}$:

$$6x \frac{dx}{dt} - 2 \frac{dx}{dt} = 3 \frac{dx}{dt}$$

$$(6x - 2) \frac{dx}{dt} = 3 \frac{dx}{dt}$$

$$(6x - 2) = 3$$

Resolvemos para x :

$$6x = 5$$

$$x = \frac{5}{6}$$

Substituímos $x = \frac{5}{6}$ em $y = 3x^2 - 2x$ para encontrar y :

$$y = 3\left(\frac{5}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{5}{12}$$

O ponto na parábola onde a velocidade da ordenada y é o triplo da velocidade da abscissa x é $\left(\frac{5}{6}, \frac{5}{12}\right)$.

SOLUÇÃO 54

Primeiro, calculamos as derivadas de x e y em relação a t :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1+t}{t^3} \right) = \frac{-2t-3}{t^4}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} \right) = -\frac{3}{t^3} - \frac{1}{2t^2}$$

A inclinação da tangente é dada por $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$. Substituímos as derivadas encontradas:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-\frac{3}{t^3} - \frac{1}{2t^2}}{\frac{-2t-3}{t^4}} = \frac{t^2+6t}{4t+6}$$

Para encontrar o valor de t que corresponde ao ponto $P(2,2)$, igualamos as equações paramétricas a 2:

$$\frac{1+t}{t^3} = 2 \quad \text{e} \quad \frac{3}{2t^2} + \frac{1}{2t} = 2$$

Resolvendo o sistema de equações, encontramos o valor correspondente de $t = 1$. Com esse valor de t , substituímos na equação da inclinação da tangente para encontrar a inclinação m no ponto P .

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{P(2,2)} = \left. \frac{t^2+6t}{4t+6} \right|_{t=1} = \frac{7}{10}$$

A equação da tangente no ponto $P(2,2)$ é:

$$y-2 = \frac{7}{10}(x-2)$$

Para encontrar a equação da normal, utilizamos a inclinação negativa recíproca $-\frac{1}{m}$:

$$y-2 = -\frac{10}{7}(x-2)$$

SOLUÇÃO 55

Considere as funções paramétricas dadas por:

$$u(s) = 2\ln(\cot(s)) \quad \text{e} \quad v(s) = \tan(s) + \cot(s)$$

Primeiro, vamos calcular as derivadas de u e v em relação a s :

$$\frac{du}{ds} = \frac{d}{ds}(2\ln(\cot(s))) = 2\left(\frac{1}{\cot(s)}\right)\left(-\frac{1}{\sin^2(s)}\right) = \frac{-2}{\sin(s)\cos(s)} = \frac{-4}{\sin(2s)}$$

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} &= \frac{d}{ds}(\tan(s) + \cot(s)) = \sec^2(s) + \left(-\frac{1}{\sin^2(s)}\right) \\ &= \frac{1}{\cos^2(s)} - \frac{1}{\sin^2(s)} = -\frac{\cos^2(s) - \sin^2(s)}{\cos^2(s)\sin^2(s)} = -\frac{\cos(2s)}{\cos^2(s)\sin^2(s)} \end{aligned}$$

Para calcular $\frac{du}{dv}$, dividimos $\frac{du}{ds}$ por $\frac{dv}{ds}$:

$$\frac{du}{dv} = \frac{\frac{-4}{\sin(2s)}}{-\frac{\cos(2s)}{\cos^2(s)\sin^2(s)}} = \tan(2s)$$

SOLUÇÃO 56

Seja $B(t)$ o número de pessoas que já ouviram o boato no tempo t e $P - B(t)$ as que ainda não ouviram. A taxa de espalhamento do boato é dada por:

$$v_B = \frac{dB}{dt} = k \cdot B(P - B)$$

onde k é uma constante de proporcionalidade. Para encontrar o momento em que o boato se espalha com velocidade máxima, isto é, quando v_B é máximo, diferenciamos novamente em relação a t para obter a segunda derivada de B :

$$\frac{dv_B}{dt} = \frac{d^2B}{dt^2} = \frac{d}{dt}(k(B)(P - B)) = k((P - B) - B) \frac{dB}{dt}$$

Igualamos a segunda derivada a zero para encontrar os pontos críticos:

$$\frac{d^2 B}{dt^2} = k((P - B) - B) \frac{dB}{dt} = 0 \implies k((P - 2B)) \cdot [k \cdot B(P - B)] = 0$$

$$\implies B(P - 2B)(P - B) = 0$$

Como $B \neq 0$ e $P \neq B$ (do contrário não teríamos ninguém ouvindo o boato ou todo mundo já ouviu o boato, situações nas quais $v_B = 0$), está imposto que $P = 2B$ e portanto

$$B = \frac{P}{2}$$

como queríamos mostrar.

SOLUÇÃO 57

Considerando um reservatório em forma de cone circular reto, a relação entre o raio r da superfície da água e a altura h da água é constante e dada pela tangente do ângulo formado pela altura e o raio da base do cone. Se o cone tem altura total $H = 15$ m e raio da base $R = 10$ m, então:

$$\frac{r}{h} = \frac{R}{H} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$$

$$r = \frac{2h}{3}$$

Substituindo r na fórmula do volume de um cone $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$, obtemos:

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(\frac{2h}{3}\right)^2 h = \frac{4}{27}\pi h^3$$

Dada a taxa de enchimento do reservatório $\frac{dV}{dt} = 0,1 \text{ m}^3/\text{s}$, diferenciamos V em relação ao tempo t para encontrar a relação entre $\frac{dV}{dt}$ e $\frac{dh}{dt}$:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{4}{27}\pi h^3 \right) = \frac{4\pi}{9} h^2 \frac{dh}{dt}$$

Substituindo $\frac{dV}{dt} = 0,1 \text{ m}^3/\text{s}$ e isolando $\frac{dh}{dt}$ quando $h = 5$ m:

$$0,1 = \frac{4\pi}{9}(5)^2 \frac{dh}{dt}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{0,1 \cdot 9}{4\pi \cdot 25} = \frac{9}{1000\pi} \text{ m/s}$$

Assim, a velocidade com que o nível da água está subindo no instante em que $h = 5 \text{ m}$ é $\frac{9}{1000\pi} \text{ m/s}$.

SOLUÇÃO 58

Pela Lei dos Senos, temos a relação:

$$\frac{5}{\sin(\alpha)} = \frac{2}{\sin(\pi - (\alpha + \theta))} \Rightarrow 5 \sin(\alpha + \theta) = 2 \sin(\alpha)$$

onde usamos que $\sin x = \sin(\pi - x)$. Continuando a simplificar e tendo em mente que $\theta = \pi/3$,

$$5(\sin \alpha \cos \frac{\pi}{3} + \sin \frac{\pi}{3} \cos \alpha) = 2 \sin \alpha$$

$$\frac{5}{2}(\sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha) = 2 \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha + \sqrt{3} \cos \alpha = \frac{4}{5} \sin \alpha$$

$$1 + \sqrt{3} \cot \alpha = \frac{4}{5} \Rightarrow \cot \alpha = \frac{-1}{5\sqrt{3}}$$

como $1 + \cot^2 \alpha = \csc^2 \alpha$ e sabemos que $\pi/2 < \alpha < \pi$ da figura, concluímos que

$$\frac{1}{\sin^2 \alpha} = 1 + \frac{1}{3 \cdot 25} = \frac{76}{75} \therefore \sin(\alpha) = \sqrt{\frac{75}{76}} \Rightarrow \cos \alpha = -\sqrt{\frac{1}{76}}$$

Agora que conhecemos α , podemos diferenciar a lei dos Senos com respeito ao tempo para encontrar a taxa de variação de α :

$$\frac{d}{dt} [5 \sin(\alpha + \theta)] = \frac{d}{dt} [2 \sin(\alpha)]$$

$$\Rightarrow 5 \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right) \left(\frac{d\alpha}{dt} + \frac{d\theta}{dt}\right) = 2 \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\Rightarrow 5 \left(\cos \alpha \cos \frac{\pi}{3} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{3} \right) \left(\frac{d\alpha}{dt} + 0,01 \right) = 2 \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

Isolando a derivada e aplicando os valores conhecidos para $\cos \alpha$ e $\sin \alpha$, encontramos o que desejávamos

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{-1}{95} \text{ rad/s}$$

SOLUÇÃO 59

Primeiro, convertamos a velocidade angular de $6^\circ/\text{s}$ para radianos por segundo:

$$\frac{d\varphi}{dt} = 6^\circ/\text{s} \times \frac{\pi}{180^\circ} = \frac{\pi}{30} \text{ rad/s}$$

Dado que $r = a\varphi$ e $a = 10 \text{ cm}$, temos $\frac{dr}{dt} = a \frac{d\varphi}{dt}$. Substituímos os valores de a e $\frac{d\varphi}{dt}$:

$$\frac{dr}{dt} = 10 \times \frac{\pi}{30} = \frac{\pi}{3} \text{ cm/s}$$

Portanto, a velocidade com que se alonga o raio polar r , no momento em que $r = 25 \text{ cm}$, é $\frac{\pi}{3} \text{ cm/s}$.

SOLUÇÃO 60

Dada a proporção, podemos escrever a massa de AM como $m_{AM} = k \cdot AM^2$, onde k é a constante de proporcionalidade. Com $AM = 2 \text{ cm}$ e $m_{AM} = 10 \text{ g}$, temos:

$$10 = k \cdot (2)^2$$

$$k = \frac{10}{4} = 2,5 \text{ g/cm}^2$$

Para a massa total da barra AB , considerando seu comprimento total de 12 cm , temos:

$$m_{AB} = k \cdot AB^2 = 2,5 \cdot (12)^2 = 2,5 \cdot 144 = 360 \text{ g}$$

A densidade linear em qualquer ponto M é dada por $\frac{dm}{dx}$, onde x é a distância de M a A . Assim:

$$\frac{dm}{dx} = \frac{d}{dx}(kx^2) = 2kx = 5x \text{ g/cm}$$

Portanto, a densidade linear nos pontos A e B é 0 g/cm e 60 g/cm , respectivamente, pois em A , $x = 0$ e em B , $x = 12 \text{ cm}$.

SOLUÇÃO 61

Consideremos as fórmulas para a área do círculo $A = \pi r^2$ e a superfície da esfera $S = 4\pi r^2$. Se r é o comprimento do raio e δr o erro na determinação do raio, o erro relativo em r é $\frac{\delta r}{r} = 1\%$. Utilizando diferenciais para estimar os erros relativos nas áreas, temos:

- Para a área do círculo:

$$\delta A = 2\pi r \delta r$$

O erro relativo na área do círculo é:

$$\frac{\delta A}{A} = \frac{2\pi r \delta r}{\pi r^2} = 2 \frac{\delta r}{r}$$

- Para a superfície da esfera:

$$\delta S = 8\pi r \delta r$$

O erro relativo na superfície da esfera é:

$$\frac{\delta S}{S} = \frac{8\pi r \delta r}{4\pi r^2} = 2 \frac{\delta r}{r}$$

Portanto, um erro relativo de 1% no raio leva a um erro relativo de aproximadamente 2% , tanto na área do círculo quanto na superfície da esfera.

SOLUÇÃO 62

Considere um retângulo com comprimento x e largura y , onde o perímetro é $2x + 2y = l$ e a área $A = xy$. Para maximizar A , expressemos y em termos de x e l : $y = \frac{l}{2} - x$. Substituímos y na fórmula da área: $A(x) = x\left(\frac{l}{2} - x\right) = \frac{l}{2}x - x^2$. Maximizamos A ao encontrar onde sua derivada é zero: $A'(x) = \frac{l}{2} - 2x = 0$, o que implica $x = \frac{l}{4}$. Portanto, a maior área possível é $A = xy = \left(\frac{l}{4}\right)^2 = \frac{l^2}{16}$, que é um

quadrado.

SOLUÇÃO 63

Considere que o raio da esfera dada seja R , que a altura do cone seja h e o raio da sua base seja r . A geratriz do cone é dada por Pitágoras: $g = \sqrt{h^2 + r^2}$. Uma relação conhecida entre o raio R de uma circunferência inscrita em um cone circular reto e as dimensões desse cone é dada por

$$\begin{aligned} R &= \frac{rh}{g+r} = \frac{rh}{\sqrt{h^2+r^2}+r} \Rightarrow \sqrt{h^2+r^2} = \frac{rh}{R} - r = \frac{r(h-R)}{R} \\ \Rightarrow h^2+r^2 &= \frac{r^2(h-R)^2}{R^2} \Rightarrow h^2 = r^2 \left(\frac{(h-R)^2}{R^2} - 1 \right) \\ \therefore r^2 &= \frac{R^2 h^2}{h^2 - 2Rh} = \frac{R^2 h}{h - 2R} \end{aligned}$$

onde a relação $R = rh/(g+r)$ pode ser demonstrada por semelhança de triângulos (*faça a figura, é um bom exercício de geometria*). Além disso, sabemos que o volume do cone é dado por

$$V = \frac{\pi}{3} r^2 h$$

Substituindo o que encontramos para r^2 , temos

$$V(h) = \frac{\pi}{3} \frac{R^2 h^2}{h - 2R}$$

Para encontrar o volume mínimo, derivamos e igualamos a zero:

$$\frac{dV}{dh} = 0 \Rightarrow \frac{hR^2(h-4R)}{(h-2R)^2} = 0 \Rightarrow h = 4R$$

A altura do cone de volume mínimo circunscrito a uma esfera de raio R dada é $h = 4R$. Sabendo disso, podemos voltar em $r^2 = R^2 h / (h - 2R)$ e descobrir quem é o raio.

$$r^2 = \frac{R^2 \cdot 4R}{4R - 2R} = \frac{4R^3}{2R} = 2R^2 \Rightarrow r = R\sqrt{2}$$

A razão entre a altura e o raio, que estávamos querendo encontrar, é então dada por

$$\frac{h}{r} = \frac{4R}{R\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

SOLUÇÃO 64

O volume do cilindro é dado por $V = \pi r^2 h$ e a sua área superficial é dada pela soma da área das suas bases (topo e fundo, que são dois círculos) com a sua área lateral:

$$A = \pi r^2 + \pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r + h)$$

Isolando a altura do cilindro na expressão do volume e lembrando-se que V é fixo (constante), temos:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} \implies A(r) = 2\pi r \left(r + \frac{V}{\pi r^2} \right) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

O que garante que a área pode ser minimizada é o teste da segunda derivada, isto é, verificamos que $\frac{d^2 A}{dr^2} = 4\pi + \frac{4V}{r^3} > 0 \forall r \in \mathbb{R}^*$. Sendo maior que zero, A tem um mínimo, que pode ser encontrado derivando A e igualando a zero:

$$\frac{dA}{dr} = 0 \implies 0 = 4\pi r - \frac{2V}{r^2} \implies 4\pi r^3 = 2V \implies r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$$

Voltando em $V = \pi r^2 h$, encontramos o h respectivo:

$$h = \frac{V}{\pi r^2} = \frac{V}{\pi \left(\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} \right)^2} = 2 \cdot \left(\frac{V}{2\pi} \right)^1 \cdot \left(\frac{V}{2\pi} \right)^{-\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$$

SOLUÇÃO 65

Primeiro, consideramos o equilíbrio de momentos em relação ao ponto de pivô A . A força P atuando no extremo B da barra gera um momento em sentido anti-horário, enquanto o peso da barra e a carga Q geram momentos em sentido horário. Assumindo que a barra está em equilíbrio estático, a soma desses momentos deve

ser igual a zero. O momento gerado por P é simplesmente $P \cdot x$, e o momento devido à carga Q é $Q \cdot a$. Já o momento devido ao peso da barra é o produto de seu peso total $q \cdot x$ pelo braço de alavanca, que é a distância do centro de massa ao ponto A , ou seja, $\frac{x}{2}$. Assim, a equação de equilíbrio de momentos é:

$$P \cdot x = Q \cdot a + \frac{q \cdot x^2}{2}.$$

Para encontrar o valor de x que minimiza P , isolamos P na equação acima:

$$P = \frac{Q \cdot a}{x} + \frac{q \cdot x}{2}.$$

Agora, diferenciamos P em relação a x :

$$\frac{dP}{dx} = -\frac{Q \cdot a}{x^2} + \frac{q}{2}.$$

Para encontrar o mínimo de P , precisamos resolver $\frac{dP}{dx} = 0$. Portanto, igualamos a derivada a zero e resolvemos para x :

$$-\frac{Q \cdot a}{x^2} + \frac{q}{2} = 0 \implies x = \sqrt{\frac{2Qa}{q}}.$$

Assim, a distância x para a qual a força P é mínima é $\sqrt{\frac{2Qa}{q}}$.

SOLUÇÃO 66

Para calcular a derivada de uma função usando a definição, consideramos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Aplicando essa definição à função em questão, obtemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{x+h}{x+h+1} - \frac{x}{x+1}}{h}$$

Observa-se que, ao aplicarmos o limite diretamente, caímos em uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Para resolver essa indeterminação, manipulamos a expressão para simplificá-la.

Primeiro, reescrevemos $f(x)$ como:

$$f(x) = \frac{x+1-1}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1}$$

Assim, temos $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ e $f(x+h) = 1 - \frac{1}{x+1+h}$. Substituindo esses valores na definição, obtemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left(1 - \frac{1}{x+1+h}\right) - \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)}{h}$$

Simplificando o numerador, encontramos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\frac{(x+1+h)-(x+1)}{(x+1)(x+1+h)}}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{(x+1)(x+1+h)} \cdot \frac{1}{h}$$

Cancelando h no numerador e no denominador, obtemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{(x+1)(x+1+h)}$$

Ao tomar o limite $h \rightarrow 0$, chegamos ao valor da derivada da função:

$$f'(x) = \frac{1}{(x+1)^2}$$

SOLUÇÃO 67

Temos que:

$$\sqrt[9]{x} = x^{\frac{1}{9}}$$

Assim, podemos aplicar a regra da derivada $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$. Para $n = \frac{1}{9}$, obtemos:

$$g'(x) = \frac{1}{9} \cdot x^{\frac{1}{9}-1} = \frac{1}{9} \cdot x^{-\frac{8}{9}} = \frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$$

Logo:

$$g'(x) = \frac{1}{9\sqrt[9]{x^8}}$$

SOLUÇÃO 68

Retas paralelas possuem o mesmo coeficiente angular. Como o coeficiente angular da reta $y = 4x + 2$ é 4, estamos procurando uma reta da seguinte forma:

$$y = 4x + b$$

Se a reta é tangente à função f , seu coeficiente angular deve ser a derivada de f no ponto de tangência. Logo, temos:

$$f'(x) = 4$$

Sendo $f(x) = x^2$, então:

$$f'(x) = 2x = 4$$

Portanto

$$x = 2$$

O ponto de tangência é então $(2, f(2)) = (2, 4)$. Sabendo que esse ponto pertence à reta, podemos encontrar b na equação da mesma.

$$4 = 4 \cdot 2 + b$$

Assim, temos:

$$b = -4$$

Portanto, a equação da reta procurada é dada por:

$$y = 4x - 4$$

SOLUÇÃO 69

Utilizando a regra do produto:

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

E considerando $u(x) = \sin(\cos^2 x)$ e $v(x) = \cos(\sin^2 x)$, teremos ao aplicar a regra da cadeia:

$$u'(x) = \cos(\cos^2 x) \cdot \frac{d}{dx}(\cos^2 x)$$

Derivando $\cos^2 x$ em relação a x , obtemos

$$\frac{d}{dx}(\cos^2 x) = 2 \cos x \cdot (-\sin x) = -2 \cos x \sin x$$

Assim, temos

$$u'(x) = \cos(\cos^2 x) \cdot (-2 \cos x \sin x) = -2 \cos(\cos^2 x) \cos x \sin x$$

Agora, calculamos $v'(x)$. Novamente, aplicamos a regra da cadeia:

$$v'(x) = -\sin(\sin^2 x) \cdot \frac{d}{dx}(\sin^2 x)$$

Derivando $\sin^2 x$ em relação a x , obtemos

$$\frac{d}{dx}(\sin^2 x) = 2 \sin x \cos x$$

Portanto,

$$v'(x) = -\sin(\sin^2 x) \cdot (2 \sin x \cos x) = -2 \sin(\sin^2 x) \sin x \cos x$$

Substituindo $u'(x)$, $v(x)$, $u(x)$ e $v'(x)$ na fórmula da regra do produto, temos:

$$\begin{aligned} f'(x) = & (-2 \cos(\cos^2 x) \cos x \sin x) \cos(\sin^2 x) + \\ & + \sin(\cos^2 x) (-2 \sin(\sin^2 x) \sin x \cos x) \end{aligned}$$

Observamos que há um fator comum de $-2 \sin x \cos x$ em ambos os termos, que podemos fatorar:

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x (\cos(\cos^2 x) \cos(\sin^2 x) + \sin(\cos^2 x) \sin(\sin^2 x))$$

Utilizando a identidade trigonométrica $\cos A \cos B + \sin A \sin B = \cos(A - B)$, reescrevemos o resultado como

$$f'(x) = -2 \sin x \cos x \cdot \cos(\cos^2 x - \sin^2 x)$$

Finalmente, aplicando a identidade $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$, chegamos à forma simplificada:

$$f'(x) = -\sin(2x) \cos(\cos(2x))$$

SOLUÇÃO 70

Considerando $u(x) = \sin^n x$ e $v(x) = \cos(nx)$ e aplicando a regra do produto, temos que, primeiro, calcular $u'(x)$. Aplicando a regra da cadeia:

$$u'(x) = n \sin^{n-1} x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$$

A derivada de $\sin x$ em relação a x é $\cos x$, de modo que

$$u'(x) = n \sin^{n-1} x \cdot \cos x$$

Agora, calculamos $v'(x)$, onde $v(x) = \cos(nx)$. Usando de novo a regra da cadeia, obtemos:

$$v'(x) = -\sin(nx) \cdot \frac{d}{dx}(nx)$$

A derivada de nx em relação a x é n , portanto,

$$v'(x) = -n \sin(nx)$$

Substituindo $u'(x)$, $v(x)$, $u(x)$ e $v'(x)$ na expressão da regra do produto, temos:

$$f'(x) = (n \sin^{n-1} x \cdot \cos x) \cos(nx) + \sin^n x (-n \sin(nx))$$

Simplificando a expressão, obtemos finalmente:

$$f'(x) = n \sin^{n-1} x \cos x \cos(nx) - n \sin^n x \sin(nx)$$

SOLUÇÃO 71

Primeiro reescrevemos $f(x)$ de uma forma mais conveniente. Multiplicando o numerador e o denominador por $x - \sqrt{1+x^2}$, com isso obtemos:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}(x + \sqrt{1+x^2})} \cdot \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{x - \sqrt{1+x^2}} = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{-\sqrt{1+x^2}}$$

Simplificando, temos:

$$f(x) = \frac{x - \sqrt{1+x^2}}{-\sqrt{1+x^2}} = 1 - \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

Agora, derivamos cada termo separadamente. A primeira parcela, 1, tem derivada zero. Para a segunda parcela, usamos a regra do quociente:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \frac{\sqrt{1+x^2} \cdot 1 - x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{(1+x^2)} = \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2}$$

Isso simplifica para finalmente:

$$f'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}}$$

SOLUÇÃO 72

- (a) Para encontrar o ponto da curva em que a abscissa e a ordenada estão mudando na mesma taxa, consideramos as derivadas temporais $\frac{dx}{dt}$ e $\frac{dy}{dt}$. Como $y = x^2$, derivamos ambos os lados em relação ao tempo t :

$$\frac{dy}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

Para que as taxas de variação de x e y sejam iguais, devemos ter $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$. Substituindo essa condição na equação obtida, temos:

$$\frac{dx}{dt} = 2x \frac{dx}{dt}$$

Dividindo ambos os lados por $\frac{dx}{dt}$ (assumindo que $\frac{dx}{dt} \neq 0$), obtemos:

$$1 = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

Substituindo $x = \frac{1}{2}$ na equação $y = x^2$, obtemos $y = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$. Portanto, o ponto da curva onde as taxas de variação são iguais é $(x, y) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right)$.

- (b) Para determinar essa taxa de variação no instante em que $x = \sin t$ e $y = \sin^2 t$, usamos as expressões para x e y e derivamos em relação a t :

$$\frac{dx}{dt} = \cos t \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = 2 \sin t \cos t$$

No ponto em que as taxas são iguais, temos $\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}$. Substituindo, obtemos:

$$2 \sin t \cos t = \cos t$$

Dividindo ambos os lados por $\cos t$ (assumindo $\cos t \neq 0$), temos:

$$2 \sin t = 1 \Rightarrow \sin t = \frac{1}{2}$$

O valor de t que satisfaz essa condição é $t = \frac{\pi}{6}$. Portanto, o instante em que as taxas de variação de x e y são iguais é $t = \frac{\pi}{6}$.

SOLUÇÃO 73

Primeiro, diferenciamos ambos os lados da equação $x \sin(xy) + 2x^2 = 0$ em relação a x . Aplicando a regra do produto e a regra da cadeia, obtemos:

$$\frac{d}{dx}(x \sin(xy)) + \frac{d}{dx}(2x^2) = 0$$

Calculando a derivada de cada termo separadamente, começamos com $\frac{d}{dx}(x \sin(xy))$. Usando a regra do produto, temos:

$$\frac{d}{dx}(x \sin(xy)) = \sin(xy) + x \cos(xy) \cdot \frac{d}{dx}(xy)$$

Agora, aplicamos a regra do produto novamente para $\frac{d}{dx}(xy) = y + xy'$, resultando em:

$$\frac{d}{dx}(x \sin(xy)) = \sin(xy) + x \cos(xy)(y + xy')$$

Aplicando a propriedade distributiva:

$$\frac{d}{dx}(x \sin(xy)) = \sin(xy) + xy \cos(xy) + x^2 y' \cos(xy)$$

A derivada de $2x^2$ é simplesmente $4x$, então temos:

$$\sin(xy) + xy \cos(xy) + x^2 y' \cos(xy) + 4x = 0$$

Rearranjando novamente os termos, obtemos:

$$y'x^2 \cos(xy) + xy \cos(xy) + \sin(xy) + 4x = 0$$

que é a expressão desejada, mostrando que o que é pedido é satisfeito.

SOLUÇÃO 74

Consideremos um retângulo com lados x e y e área fixa A . Assim, temos:

$$A = xy$$

O perímetro P do retângulo é dado por:

$$P = 2(x + y)$$

Substituindo $y = \frac{A}{x}$ na expressão do perímetro, obtemos:

$$P = 2\left(x + \frac{A}{x}\right)$$

Para encontrar o valor de x que minimiza o perímetro, derivamos P em relação a x e igualamos a zero:

$$P' = 2\left(1 - \frac{A}{x^2}\right) = 0$$

Resolvendo para x , temos:

$$1 = \frac{A}{x^2} \Rightarrow x^2 = A \Rightarrow x = \sqrt{A}$$

Para verificar que este valor de x minimiza P , calculamos a segunda derivada de P :

$$P'' = \frac{4A}{x^3}$$

Como $P'' > 0$ para $x > 0$, concluímos que $x = \sqrt{A}$ minimiza P .

Quando $x = \sqrt{A}$, o valor de y também é $y = \sqrt{A}$, de modo que o retângulo é, na verdade, um quadrado. Assim, provamos que, entre todos os retângulos de uma dada área, o quadrado tem o menor perímetro.

SOLUÇÃO 75

Seja x a largura perpendicular ao muro e y o comprimento paralelo ao muro. Como o pasto é adjacente ao muro, a cerca é necessária para os dois lados de comprimento x e um lado de comprimento y . Portanto, o comprimento total da cerca é dado por:

$$L = 2x + y$$

Assim, podemos expressar y em termos de x :

$$y = L - 2x$$

A área A do retângulo é dada por:

$$A = xy = x(L - 2x) = Lx - 2x^2$$

Para maximizar A , derivamos em relação a x e igualamos a zero:

$$\frac{dA}{dx} = L - 4x = 0$$

Resolvendo para x , temos:

$$x = \frac{L}{4}$$

Substituímos $x = \frac{L}{4}$ na expressão para y :

$$y = L - 2 \cdot \frac{L}{4} = \frac{L}{2}$$

Para verificar que esse valor de x maximiza A , calculamos a segunda derivada de A :

$$\frac{d^2A}{dx^2} = -4$$

que é negativa, indicando que $x = \frac{L}{4}$ proporciona um máximo para A . Portanto, as dimensões que fornecem a área máxima do pasto são $x = \frac{L}{4}$ e $y = \frac{L}{2}$.

SOLUÇÃO 76

Definimos a função $f(x) = x^2 + y^2$, onde $y = S - x$, de modo que:

$$f(x) = x^2 + (S - x)^2$$

Expandindo, obtemos:

$$f(x) = x^2 + S^2 - 2Sx + x^2 = 2x^2 - 2Sx + S^2$$

Para encontrar o valor de x que minimiza $f(x)$, derivamos em relação a x e igualamos a zero:

$$f'(x) = 4x - 2S = 0$$

Resolvendo para x , temos:

$$x = \frac{S}{2}$$

Para confirmar que esse valor de x minimiza $f(x)$, calculamos a segunda derivada:

$$f''(x) = 4$$

que é positiva, indicando que $x = \frac{S}{2}$ é um ponto de mínimo para $f(x)$. Quando $x = \frac{S}{2}$, temos $y = S - x = \frac{S}{2}$ também, ou seja, $x = y$. Portanto, provamos que a soma $x^2 + y^2$ é mínima quando $x = y$.

SOLUÇÃO 77

Para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = e^x$ no ponto de abscissa 0, utilizamos a fórmula da equação da reta tangente em um ponto x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Primeiro, calculamos $f(0)$ substituindo $x = 0$ em $f(x) = e^x$:

$$f(0) = e^0 = 1$$

Em seguida, derivamos $f(x)$ para obter $f'(x)$. Como $f(x) = e^x$, sua derivada é $f'(x) = e^x$. Assim, temos:

$$f'(0) = e^0 = 1$$

Substituindo $f(0) = 1$ e $f'(0) = 1$ na fórmula da reta tangente, obtemos:

$$y - 1 = 1 \cdot (x - 0)$$

ou simplificando,

$$y = x + 1$$

Que é a equação de define a reta procurada.

SOLUÇÃO 78

A derivada de $f(x) = a^x$ em um ponto x qualquer é dada pelo limite:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h}$$

Utilizando a propriedade das potências $a^{x+h} = a^x \cdot a^h$, obtemos:

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^x \cdot a^h - a^x}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} a^x \frac{a^h - 1}{h}$$

Como a^x é constante em relação a h , podemos fatorá-lo para fora do limite:

$$f'(x) = a^x \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$$

Agora, o limite $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^h - 1}{h}$ é conhecido e resulta em $\ln a$. Portanto, temos:

$$f'(x) = a^x \ln a$$

Para a segunda parte do problema, queremos calcular a derivada de $f(x) = \pi^x$. Aplicando o resultado obtido, temos:

$$f'(x) = \pi^x \ln \pi$$

Pois π é uma constante real.

SOLUÇÃO 79

Para determinar a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \tan x$ no ponto de abscissa 0, utilizamos a fórmula da reta tangente

em um ponto x_0 :

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Primeiro, calculamos $f(0)$. Como $f(x) = \tan x$, temos:

$$f(0) = \tan 0 = 0$$

Em seguida, derivamos $f(x)$ para obter $f'(x)$. Sabemos que a derivada de $\tan x$ é $\sec^2 x$, então:

$$f'(x) = \sec^2 x$$

Calculando $f'(0)$, obtemos:

$$f'(0) = \sec^2 0 = 1$$

Substituindo $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ na fórmula da reta tangente, temos:

$$y - 0 = 1 \cdot (x - 0)$$

ou seja,

$$y = x$$

Essa é a equação da reta tangente ao gráfico de $f(x) = \tan x$ no ponto de abscissa 0.

SOLUÇÃO 80

Para calcular a derivada de $f(x) = \frac{x^2+1}{\sec x}$, utilizamos a regra do quociente. A regra do quociente afirma que, se $f(x) = \frac{h(x)}{g(x)}$, então:

$$f'(x) = \frac{h'(x)g(x) - h(x)g'(x)}{[g(x)]^2}$$

Derivando cada uma das funções e substituindo na expressão acima, temos:

$$f'(x) = \frac{(2x)(\sec x) - (x^2 + 1)(\sec x \cdot \tan x)}{(\sec x)^2}$$

Simplificando, temos:

$$f'(x) = \frac{2x - (x^2 + 1) \tan x}{\sec x}$$

Que é a derivada que buscávamos.

SOLUÇÃO 81

Seja $F(x) = f(x)g(x)h(x)$. Portanto, sua derivada é:

$$F'(x) = \frac{d}{dx}[f(x)g(x)h(x)]$$

Podemos pensar em $F(x)$ como o produto de duas funções: $u(x) = f(x)$ e $v(x) = g(x)h(x)$. Assim,

$$F(x) = u(x)v(x) = f(x)(g(x)h(x))$$

A derivada de $F(x)$ é então dada por:

$$F'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$$

Substituindo $u(x) = f(x)$ e $v(x) = g(x)h(x)$, obtemos:

$$F'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)v'(x)$$

Agora precisamos calcular $v'(x)$, onde $v(x) = g(x)h(x)$. Aplicamos a regra do produto novamente para $v(x)$:

$$v'(x) = g'(x)h(x) + g(x)h'(x)$$

Substituindo $v'(x)$ na expressão para $F'(x)$, temos:

$$F'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)(g'(x)h(x) + g(x)h'(x))$$

Distribuindo $f(x)$ na segunda parte da expressão, obtemos:

$$F'(x) = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

Assim, obtemos:

$$[f(x)g(x)h(x)]' = f'(x)g(x)h(x) + f(x)g'(x)h(x) + f(x)g(x)h'(x)$$

SOLUÇÃO 82

Vamos utilizar a regra do produto para a derivada de três funções, demonstrada anteriormente nos exercícios. Se definirmos $f(x) = u(x)v(x)w(x)$ com:

$$u(x) = 1 + \sqrt{x}, \quad v(x) = e^x, \quad w(x) = \tan x,$$

então a derivada de $f(x)$ será dada por:

$$f'(x) = u'(x)v(x)w(x) + u(x)v'(x)w(x) + u(x)v(x)w'(x)$$

Agora, calculamos cada uma das derivadas $u'(x)$, $v'(x)$ e $w'(x)$:

1. Derivada de $u(x) = 1 + \sqrt{x}$:

$$u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

2. Derivada de $v(x) = e^x$:

$$v'(x) = e^x$$

3. Derivada de $w(x) = \tan x$:

$$w'(x) = \sec^2 x$$

Substituindo essas derivadas na expressão de $f'(x)$, obtemos:

$$f'(x) = \left(\frac{1}{2\sqrt{x}} \right) e^x \tan x + (1 + \sqrt{x}) e^x \tan x + (1 + \sqrt{x}) e^x \sec^2 x$$

Apenas sintetizando, temos:

$$f'(x) = \frac{e^x \tan x}{2\sqrt{x}} + (1 + \sqrt{x}) e^x \tan x + (1 + \sqrt{x}) e^x \sec^2 x$$

SOLUÇÃO 83

Primeiro, podemos reescrever $f(x)$ como $f(x) = x^{-1}$, com isso:

1. Primeira derivada $f'(x)$:

$$f'(x) = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

2. Segunda derivada $f''(x)$:

$$f''(x) = \frac{d}{dx}(-x^{-2}) = 2x^{-3} = \frac{2}{x^3}$$

3. Terceira derivada $f'''(x)$:

$$f'''(x) = \frac{d}{dx}(2x^{-3}) = -6x^{-4} = -\frac{6}{x^4}$$

Assim, temos:

$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}$$

SOLUÇÃO 84

Para encontrar $\frac{dy}{dx}$, aplicamos a regra do quociente:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{d}{dx}(t)(x+t) - t\frac{d}{dx}(x+t)}{(x+t)^2}$$

Derivando cada termo, temos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dt}{dx}\right)(x+t) - t\left(1 + \frac{dt}{dx}\right)}{(x+t)^2}$$

Substituindo os valores $x = 1$, $t = 2$ e $\frac{dt}{dx} = 4$, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(4)(1+2) - (2)(1+4)}{(1+2)^2}$$

Calculando os valores, obtemos:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 \cdot 3 - 2 \cdot 5}{3^2} = \frac{12 - 10}{9} = \frac{2}{9}$$

Portanto,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=1} = \frac{2}{9}$$

SOLUÇÃO 85

A derivada de $x(t) = \cos(t)$ em relação a t é dada por:

$$\frac{d}{dt}(\cos(t)) = -\sin(t)$$

Em seguida, calculamos a segunda derivada de $x(t)$:

$$\frac{d}{dt}(-\sin(t)) = -\cos(t)$$

Agora substituímos $\frac{d^2x}{dt^2}$ e x na expressão $\frac{d^2x}{dt^2} + x$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + x = -\cos(t) + \cos(t) = 0$$

Verificando o que foi pedido.

SOLUÇÃO 86

Calculando a derivada $\frac{d}{dt}\left(x \frac{dx}{dt}\right)$ usando a regra do produto:

$$\frac{d}{dt}\left(x \frac{dx}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(x) \cdot \frac{dx}{dt} + x \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right)$$

Como $\frac{d}{dt}(x) = \frac{dx}{dt}$, obtemos

$$\frac{d}{dt}\left(x \frac{dx}{dt}\right) = \frac{dx}{dt} \cdot \frac{dx}{dt} + x \cdot \frac{d^2x}{dt^2}$$

Isso nos leva à expressão:

$$\frac{d}{dt}\left(x \frac{dx}{dt}\right) = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x \frac{d^2x}{dt^2}$$

Que é a que buscávamos encontrar.

SOLUÇÃO 87

Primeiro, derivamos $g(x) = f(e^{2x})$ em relação a x usando a regra da cadeia:

$$g'(x) = [f(e^{2x})]' = f'(e^{2x}) \cdot (e^{2x})' = f'(e^{2x}) \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x} f'(e^{2x})$$

Agora, para encontrar $g''(x)$, derivamos novamente $g'(x)$ em relação a x :

$$g''(x) = [2e^{2x} f'(e^{2x})]'$$

Aplicando a regra do produto, temos:

$$g''(x) = (2e^{2x})' f'(e^{2x}) + 2e^{2x} [f'(e^{2x})]'$$

Calculamos cada termo separadamente. Para o primeiro termo:

$$(2e^{2x})' = 2 \cdot 2e^{2x} = 4e^{2x}$$

Então, o primeiro termo é:

$$4e^{2x} f'(e^{2x})$$

Para o segundo termo, aplicamos a regra da cadeia em $f'(e^{2x})$:

$$[f'(e^{2x})]' = f''(e^{2x}) \cdot (e^{2x})' = f''(e^{2x}) \cdot 2e^{2x} = 2e^{2x} f''(e^{2x})$$

Assim, o segundo termo é:

$$2e^{2x} \cdot 2e^{2x} f''(e^{2x}) = 4(e^{2x})^2 f''(e^{2x})$$

Portanto, temos:

$$g''(x) = 4e^{2x} f'(e^{2x}) + 4(e^{2x})^2 f''(e^{2x}) = 4e^{2x} [f'(e^{2x}) + e^{2x} f''(e^{2x})]$$

Logo, verificamos que:

$$g''(x) = 4e^{2x} [f'(e^{2x}) + e^{2x} f''(e^{2x})]$$

SOLUÇÃO 88

Sendo α uma constante, temos ao aplicar a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \alpha e^{\alpha x}$$

Agora, derivamos novamente para obter a derivada de segunda ordem:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} (\alpha e^{\alpha x}) = \alpha^2 e^{\alpha x}$$

Substituímos y , $\frac{dy}{dx}$, e $\frac{d^2 y}{dx^2}$ na equação diferencial:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 3 \frac{dy}{dx} + 2y = \alpha^2 e^{\alpha x} - 3\alpha e^{\alpha x} + 2e^{\alpha x} = 0$$

Fatoramos $e^{\alpha x}$, que é sempre diferente de zero:

$$e^{\alpha x} (\alpha^2 - 3\alpha + 2) = 0$$

Portanto, devemos resolver a equação:

$$\alpha^2 - 3\alpha + 2 = 0$$

Essa é uma equação quadrática em α , cujas soluções são:

$$\alpha = 1 \quad \text{ou} \quad \alpha = 2$$

São esses valores que verificam a equação.

SOLUÇÃO 89

Derivando y em relação a t usando a regra da cadeia:

$$\frac{dy}{dt} = 4(-1)x^{-2} \frac{dx}{dt}$$

Como o enunciado fornece que $\frac{dx}{dt} = \beta$, temos:

$$\frac{dy}{dt} = -4x^{-2}\beta$$

Derivamos novamente em relação a t para obter $\frac{d^2 y}{dt^2}$:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -4\beta(-2)x^{-3} \frac{dx}{dt}$$

Substituindo $\frac{dx}{dt} = \beta$, obtemos:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = 8\beta x^{-3} \cdot \beta$$

Onde finalmente, temos:

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = \frac{8\beta^2}{x^3}$$

Assim, verificamos o que foi proposto.

SOLUÇÃO 90

Para verificarmos a derivada de $f(x)^{g(x)}$, lembremos que:

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} [g(x) \ln f(x)]'$$

Desenvolvendo o lado direito da expressão, aplicamos a regra do produto para $[g(x) \ln f(x)]'$:

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} [g'(x) \ln f(x) + g(x) (\ln f(x))']$$

Em seguida, utilizamos a regra da cadeia para a derivada de $\ln f(x)$:

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} \left[g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{1}{f(x)} f'(x) \right]$$

Distribuindo e simplificando, obtemos:

$$[f(x)^{g(x)}]' = f(x)^{g(x)} g'(x) \ln f(x) + g(x) f(x)^{g(x)-1} f'(x)$$

Assim, demonstramos a expressão solicitada.

SOLUÇÃO 91

A equação geral do polinômio de Taylor (indo até ordem 5) para a função em torno de $x_0 = 1$ é dada por:

$$\begin{aligned} P(x) = & f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 \\ & + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 \end{aligned}$$

Calculamos as derivadas de $f(x) = \ln x$ e suas avaliações em $x = 1$:

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \ln x \Rightarrow f(1) = 0 \\
 f'(x) &= \frac{1}{x} \Rightarrow f'(1) = 1 \\
 f''(x) &= -\frac{1}{x^2} \Rightarrow f''(1) = -1 \\
 f'''(x) &= \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'''(1) = 2 \\
 f^{(4)}(x) &= -\frac{6}{x^4} \Rightarrow f^{(4)}(1) = -6 \\
 f^{(5)}(x) &= \frac{24}{x^5} \Rightarrow f^{(5)}(1) = 24
 \end{aligned}$$

Substituindo esses valores na expressão do polinômio de Taylor, obtemos:

$$\begin{aligned}
 P(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 \\
 &\quad + \frac{f^{(4)}(1)}{4!}(x-1)^4 + \frac{f^{(5)}(1)}{5!}(x-1)^5 \\
 &= 0 + 1(x-1) + \frac{-1}{2}(x-1)^2 + \frac{2}{6}(x-1)^3 + \frac{-6}{24}(x-1)^4 + \frac{24}{120}(x-1)^5
 \end{aligned}$$

Assim, o polinômio de Taylor de ordem 5 para $f(x) = \ln x$ em torno de $x = 1$ é:

$$P(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3 - \frac{1}{4}(x-1)^4 + \frac{1}{5}(x-1)^5$$

SOLUÇÃO 92

Calculando as derivadas até a quinta ordem e as avaliando em $x_0 = 0$, utilizando a fórmula do polinômio de Taylor:

$$P(x) = g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{g^{(5)}(0)}{5!}x^5.$$

Calculando as derivadas de diferentes ordens:

$$\begin{aligned}
g(x) &= \arctan(x) \Rightarrow g(0) = 0, \\
g'(x) &= \frac{1}{x^2 + 1} \Rightarrow g'(0) = 1, \\
g''(x) &= -\frac{2x}{(x^2 + 1)^2} \Rightarrow g''(0) = 0, \\
g'''(x) &= \frac{-2 + 6x^2}{(x^2 + 1)^3} \Rightarrow g'''(0) = -2, \\
g^{(4)}(x) &= \frac{-24x^3 + 24x}{(x^2 + 1)^4} \Rightarrow g^{(4)}(0) = 0, \\
g^{(5)}(x) &= \frac{-24(5x^4 - 10x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^5} \Rightarrow g^{(5)}(0) = 24.
\end{aligned}$$

Substituindo as derivadas calculadas na expressão do polinômio de Taylor, obtemos:

$$\begin{aligned}
P(x) &= g(0) + g'(0)x + \frac{g''(0)}{2!}x^2 + \frac{g'''(0)}{3!}x^3 + \frac{g^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \frac{g^{(5)}(0)}{5!}x^5 \\
&= 0 + (1)x + \frac{0}{2}x^2 + \frac{-2}{6}x^3 + \frac{0}{24}x^4 + \frac{24}{120}x^5 \\
&= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}
\end{aligned}$$

Portanto, o polinômio de Taylor de ordem 5 para $g(x) = \arctan(x)$ em torno de $x_0 = 0$ é

$$P(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}$$

SOLUÇÃO 93

Substituindo $\sinh x$ por sua definição, $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, nos permite reescrever o limite como

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2} - x}{x^3}$$

Multiplicando o numerador e o denominador por 2, obtemos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{2x^3}$$

Substituindo $x = 0$ diretamente na expressão resulta na forma indeterminada $\frac{0}{0}$, o que indica a aplicação da regra de L'Hôpital.

Derivando o numerador e o denominador com relação a x , temos:

$$\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x} - 2x) = e^x + e^{-x} - 2$$

e

$$\frac{d}{dx}(2x^3) = 6x^2$$

Assim, obtemos o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{6x^2}$$

Novamente, ao substituir $x = 0$, obtemos a forma indeterminada $\frac{0}{0}$. Prosseguimos aplicando a regra de L'Hôpital novamente. As derivadas de $e^x + e^{-x} - 2$ e $6x^2$ são, respectivamente,

$$\frac{d}{dx}(e^x + e^{-x} - 2) = e^x - e^{-x}$$

e

$$\frac{d}{dx}(6x^2) = 12x$$

Assim, obtemos o limite

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{12x}$$

Que também é indeterminado para $x = 0$. Derivando novamente o numerador e o denominador, obtemos

$$\frac{d}{dx}(e^x - e^{-x}) = e^x + e^{-x}$$

e

$$\frac{d}{dx}(12x) = 12$$

Assim, o limite final é

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{12} = \frac{1+1}{12} = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$$

Portanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sinh x - x}{x^3} = \frac{1}{6}$$

SOLUÇÃO 94

Consideremos a mudança de variável $t = \frac{1}{x}$. Assim, quando $x \rightarrow \infty$, temos $t \rightarrow 0$. A expressão do limite então se transforma para

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\tan(t)}{t}$$

Agora estamos diante de uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$, o que nos permite aplicar a regra de L'Hôpital. Derivando o numerador e o denominador em relação a t , temos

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sec^2(t)}{1} = \sec^2(0) = 1$$

Portanto

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x \tan\left(\frac{1}{x}\right) = 1$$

SOLUÇÃO 95

Primeiro, utilizando a definição do polinômio de Taylor de ordem n para uma função $f(x)$ em torno de $x_0 = 0$:

$$P(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

Para encontrar as derivadas de $f(x) = (1+x)^\alpha$, utilizamos a regra da potência generalizada. A n -ésima derivada de $f(x)$ é dada por:

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}$$

Assim, para $x = 0$, temos:

$$f^{(k)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)$$

Substituindo as derivadas no polinômio de Taylor, obtemos:

$$\begin{aligned} P(x) = & 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3 + \dots + \\ & + \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)}{n!}x^n \end{aligned}$$

O termo de erro $E(x)$ para a aproximação do polinômio de Taylor de ordem n em torno de $x_0 = 0$ é dado pela forma de Lagrange:

$$E(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} x^{n+1}$$

para algum c entre 0 e x . Portanto, substituindo a $(n+1)$ -ésima derivada:

$$E(x) = \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!} (1+c)^{\alpha-n-1} x^{n+1}$$

Por fim, para x pequeno, o valor do polinômio de Taylor pode ser aproximado pela primeira potência de x , visto que as de ordem maior são irrelevantes, resultando em:

$$P(x) \approx 1 + \alpha x$$

Esse é o resultado fundamental em várias análises físicas.

SOLUÇÃO 96

Utilizemos a identidade trigonométrica:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos(2x)}{2} \, dx$$

Separando a integral, temos:

$$= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dx + \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(2x) \, dx$$

A primeira integral é simples e a segunda pode ser resolvida por uma substituição $u = 2x$, $du = 2 \, dx$:

$$= \frac{1}{2} [x]_0^{\frac{\pi}{2}} + \frac{1}{4} [\sin(2x)]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Calculando os limites de integração, obtemos:

$$= \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} - 0 \right) + \frac{1}{4} (\sin(\pi) - \sin(0)) = \frac{\pi}{4}$$

Portanto, $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}$.

SOLUÇÃO 97

Utilizemos a fatoração $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$:

$$\frac{x^3 + 1}{x + 1} = \frac{(x + 1)(x^2 - x + 1)}{(x + 1)} = x^2 - x + 1$$

Portanto, a integral se torna:

$$\int_0^1 (x^2 - x + 1) dx = \int_0^1 x^2 dx - \int_0^1 x dx + \int_0^1 dx$$

Calculando cada integral separadamente, temos:

$$= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 - \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^1 + [x]_0^1$$

Substituindo os limites de integração:

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 = \frac{5}{6}$$

Portanto, $\int_0^1 \frac{x^3 + 1}{x + 1} dx = \frac{5}{6}$.

SOLUÇÃO 98

Para resolver a integral $\int x e^{-x^2} dx$, utilizamos a substituição $u = -x^2$, logo $du = -2x dx$. Então, $x dx = -\frac{1}{2} du$:

$$\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int e^u du$$

A integral da exponencial de u é simples:

$$= -\frac{1}{2} e^u + C$$

Revertendo a substituição, obtemos:

$$= -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

Portanto, $\int x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$.

SOLUÇÃO 99

Para resolver a integral $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx$, podemos utilizar a substituição $u = \sin x$, então $du = \cos x \, dx$. Assim, a integral se torna:

$$\int \sqrt{u} \, du$$

Que é uma integral básica:

$$= \frac{2}{3} u^{3/2} + C$$

Revertendo a substituição, temos:

$$= \frac{2}{3} (\sin x)^{3/2} + C$$

Portanto, $\int \sqrt{\sin x} \cos x \, dx = \frac{2}{3} (\sin x)^{3/2} + C$.

SOLUÇÃO 100

Para encontrar a área do conjunto de pontos (x, y) tais que $x^2 \leq y \leq \sqrt{x}$, primeiro determinamos os pontos de interseção das curvas $y = x^2$ e $y = \sqrt{x}$ igualando-as:

$$x^2 = \sqrt{x} \Rightarrow x^4 = x \Rightarrow x^4 - x = 0 \Rightarrow x(x^3 - 1) = 0$$

As soluções são $x = 0$ e $x = 1$. Portanto, como o gráfico de $\sqrt{x}$ está “por cima” do gráfico de x^2 , a área desejada é dada pela integral:

$$\int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) \, dx$$

Calculando a integral, temos:

$$= \left[\frac{2}{3} x^{3/2} \right]_0^1 - \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^1 = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

Portanto, a área é $\frac{1}{3}$ unidades quadradas.

SOLUÇÃO 101

A área da região limitada pelas curvas $y = \sin x$, $y = 1$, e pelo eixo das ordenadas à direita do eixo y é dada pela integral da diferença entre as funções no intervalo de x onde $y = 1$ intercepta $y = \sin x$, que é $x = \frac{\pi}{2}$. Assim, a integral torna-se:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin x) dx$$

Calculando a integral, temos:

$$= [x]_0^{\frac{\pi}{2}} - [-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

Substituindo os limites de integração, obtemos:

$$= \left(\frac{\pi}{2} - 0\right) - (-1 - 0) = \frac{\pi}{2} + 1$$

Portanto, a área da região é $\frac{\pi}{2} + 1$ unidades quadradas.

SOLUÇÃO 102

Para calcular a área do segmento da parábola $y = x^2$ que corta a reta $y = 3 - 2x$, igualamos as duas equações para encontrar os pontos de interseção:

$$x^2 = 3 - 2x \Rightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática, obtemos as raízes $x = 1$ e $x = -3$. A área é dada pela integral da diferença entre as funções no intervalo entre os pontos de interseção (tomando cuidado para escrever primeiro a função cujo gráfico está por cima):

$$\int_{-3}^1 ((3 - 2x) - x^2) dx$$

Expandindo e simplificando a expressão dentro da integral, obtemos:

$$\int_{-3}^1 (-x^2 - 2x + 3) dx$$

Calculando a integral, temos:

$$= \left[-\frac{x^3}{3} - x^2 + 3x \right]_{-3}^1$$

Substituindo os limites de integração, encontramos a área de aproximadamente 10,67 unidades quadradas.

SOLUÇÃO 103

Para calcular $\int \sec x \, dx$, utilizamos a técnica de multiplicar e dividir por $\sec x + \tan x$:

$$\int \sec x \, dx = \int \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} \, dx$$

Fazendo a substituição $u = \sec x + \tan x$, temos que $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) \, dx$, que é exatamente o numerador da expressão original. Portanto, a integral se torna:

$$= \int \frac{du}{u}$$

Que é a integral do logaritmo natural:

$$= \ln |u| + C = \ln |\sec x + \tan x| + C$$

Portanto, $\int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C$.

SOLUÇÃO 104

A integral $\int \tan^2 x \, dx$ pode ser resolvida usando a identidade trigonométrica $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$. Assim, temos:

$$\int \tan^2 x \, dx = \int (\sec^2 x - 1) \, dx$$

Separando a integral, obtemos:

$$= \int \sec^2 x \, dx - \int dx$$

A integral de $\sec^2 x$ é $\tan x$, e a integral de 1 é x , portanto:

$$= \tan x - x + C$$

Portanto, $\int \tan^2 x \, dx = \tan x - x + C$.

SOLUÇÃO 105

Para resolver a integral $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20}$, primeiro completamos o quadrado no denominador:

$$2x^2 + 8x + 20 = 2(x^2 + 4x + 10) = 2((x+2)^2 + 6)$$

Assim, a integral se torna:

$$\int \frac{dx}{2((x+2)^2 + 6)}$$

Fazendo a substituição $u = x + 2$, $du = dx$, e simplificando, obtemos:

$$\frac{1}{2} \int \frac{du}{u^2 + 6}$$

Essa é uma integral de uma função racional que pode ser resolvida como uma forma de arco tangente:

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{u}{\sqrt{6}}\right) + C$$

Revertendo a substituição, temos:

$$= \frac{1}{2\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C$$

Portanto, $\int \frac{dx}{2x^2+8x+20} = \frac{1}{2\sqrt{6}} \arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{6}}\right) + C$.

SOLUÇÃO 106

Para demonstrar a fórmula para $\int \sec^n x \, dx$, começamos com a integração por partes, onde escolhemos $u = \sec^{n-2} x$ e $dv =$

$\sec^2 x \, dx$. Assim, $du = (n-2)\sec^{n-3} x \sec x \tan x \, dx$ e $v = \tan x$. A integração por partes nos dá:

$$\int \sec^n x \, dx = \sec^{n-2} x \tan x - \int \tan x \cdot (n-2)\sec^{n-2} x \tan x \, dx$$

Substituindo $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$, a integral se torna:

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^{n-2} x (\sec^2 x - 1) \, dx$$

Separando a integral, temos:

$$= \sec^{n-2} x \tan x - (n-2) \int \sec^n x \, dx + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx$$

Reorganizando os termos para isolar a integral $\int \sec^n x \, dx$, obtemos:

$$\begin{aligned} \int \sec^n x \, dx + (n-2) \int \sec^n x \, dx &= \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx \\ (n-1) \int \sec^n x \, dx &= \sec^{n-2} x \tan x + (n-2) \int \sec^{n-2} x \, dx \end{aligned}$$

Dividindo ambos os lados por $n-1$, chegamos à fórmula desejada:

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx$$

SOLUÇÃO 107

A integral $\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} \cos(x) \, dx$ pode ser avaliada notando-se que o integrando é uma função ímpar. Uma função é considerada ímpar se, para todo x , vale que $f(-x) = -f(x)$. Neste caso, x^3 é uma função ímpar, enquanto que e^{-x^2} e $\cos(x)$ são funções pares. O produto de uma função ímpar por uma função par resulta em uma função ímpar.

Dado que a integral é calculada sobre um intervalo simétrico $[-\infty, +\infty]$, as contribuições de cada metade do intervalo se can-

celam, resultando em uma integral cujo valor é zero. Portanto:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^3 e^{-x^2} \cos(x) dx = 0$$

SOLUÇÃO 108

Vamos manipular o nosso integrando:

$$\frac{dr}{r\sqrt{2Er^2+2r-p_\theta^2}} = \frac{dr}{r^2\sqrt{2E+\frac{2}{r}-\frac{p_\theta^2}{r^2}}} = \frac{d\theta}{p_\theta}$$

Tomando $u = 1/r \Rightarrow du = (-1/r^2)dr$ encontramos

$$\frac{dr}{r^2\sqrt{2E+\frac{2}{r}-\frac{p_\theta^2}{r^2}}} = \frac{-du}{\sqrt{2E+2u-u^2p_\theta^2}}$$

Completando o quadrado, temos

$$\begin{aligned} 2E+2u-u^2p_\theta^2 &= -(u^2p_\theta^2-2u)+2E \\ &= -\left(u^2p_\theta^2-2u+\frac{1}{p_\theta^2}\right)+\frac{1}{p_\theta^2}+2E \\ &= -\left(up_\theta-\frac{1}{p_\theta}\right)^2+\frac{1}{p_\theta^2}+2E \\ &= \left(2E+\frac{1}{p_\theta^2}\right)(1-z^2) \end{aligned}$$

onde

$$z \equiv \frac{up_\theta - \frac{1}{p_\theta}}{\sqrt{2E + \frac{1}{p_\theta^2}}} \Rightarrow du = \frac{\sqrt{2E + \frac{1}{p_\theta^2}}}{p_\theta} dz$$

e, portanto,

$$\int \frac{dr}{r\sqrt{2Er^2+2r-p_\theta^2}} = \int \frac{-dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int d\theta \Rightarrow C + \arccos(z) = \theta(z)$$

onde $C \in \mathbb{R}$. Seguindo,

$$\Rightarrow \theta(u) = C + \arccos \left[\frac{u p_\theta - \frac{1}{p_\theta}}{\sqrt{2E + \frac{1}{p_\theta^2}}} \right]$$

$$\frac{p_\theta}{r} - \frac{1}{p_\theta} = \sqrt{2E + \frac{1}{p_\theta^2}} \cos(\theta(r) - C)$$

$$\Rightarrow \frac{p_\theta^2}{r} = 1 + \sqrt{1 + 2E p_\theta^2} \cos(\theta(r) - C)$$

$$\therefore r(\theta) = \frac{p_\theta^2}{1 + \epsilon \cos(\theta - C)}, \quad \epsilon = \sqrt{1 + 2E p_\theta^2}$$

Já que $E < 0$, temos $0 < \epsilon < 1$ e, dessa forma, a cônica é uma **elipse**.

SOLUÇÃO 109

A integral $\int \frac{1}{\alpha^2 + (x + \beta)^2} dx$ pode ser resolvida utilizando a substituição $u = x + \beta$, da qual segue que $du = dx$. A integral se torna:

$$\int \frac{1}{\alpha^2 + u^2} du$$

Esta é uma forma padrão da integral inversa do arco tangente:

$$= \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{u}{\alpha}\right) + C$$

Revertendo a substituição, obtemos:

$$= \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{x + \beta}{\alpha}\right) + C$$

Portanto, $\int \frac{1}{\alpha^2 + (x + \beta)^2} dx = \frac{1}{\alpha} \arctan\left(\frac{x + \beta}{\alpha}\right) + C$.

SOLUÇÃO 110

Para a integral $\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$, propomos a decomposição em frações parciais:

$$\frac{1}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x+3}$$

Multiplicando ambos os lados pela expressão do denominador comum, obtemos:

$$1 = A(x+2)(x+3) + B(x-1)(x+3) + C(x-1)(x+2)$$

Para encontrar os coeficientes A , B , e C , utilizamos valores específicos de x que simplificam a equação:

$$\text{Para } x = 1: \quad 1 = 12A \Rightarrow A = \frac{1}{12}$$

$$\text{Para } x = -2: \quad 1 = -5B \Rightarrow B = -\frac{1}{5}$$

$$\text{Para } x = -3: \quad 1 = 2C \Rightarrow C = \frac{1}{2}$$

Substituindo os valores de A , B , e C na integral, temos:

$$\int \left(\frac{1}{12(x-1)} - \frac{1}{3(x+2)} + \frac{1}{4(x+3)} \right) dx$$

Resolvendo cada integral separadamente:

$$\frac{1}{12} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|x+3| + C$$

Portanto, a integral dada é resolvida como:

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)} = \frac{1}{12} \ln|x-1| - \frac{1}{3} \ln|x+2| + \frac{1}{4} \ln|x+3| + C$$

SOLUÇÃO 111

Para resolver a integral $\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$, começamos fatorando o denominador:

$$x^3 - 2x^2 + x = x(x-1)^2$$

Aplicamos a decomposição em frações parciais:

$$\frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2}$$

Multiplicando ambos os lados pela expressão do denominador comum, obtemos:

$$1 = A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx$$

Para determinar A , B , e C , utilizamos valores específicos de x :

- Substituindo $x = 0$, encontramos A :

$$1 = A(-1)^2 \Rightarrow A = 1$$

- Substituindo $x = 1$, simplificamos para encontrar C :

$$1 = C(1) \Rightarrow C = 1$$

- Para encontrar B , diferenciamos a equação e substituímos $x = 2$ (um valor que não simplifica a 0 para A e C):

$$\frac{d}{dx}(1) = \frac{d}{dx}[A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx]$$

$$0 = 2A(x-1) + B(2x-1) + C$$

Substituindo $x = 2$, $A = 1$, e $C = 1$, encontramos B :

$$0 = 2(1) + B(3) + 1 \Rightarrow B = -1$$

Portanto, a integral se torna:

$$\int \left(\frac{dx}{x} - \frac{dx}{x-1} + \frac{dx}{(x-1)^2} \right)$$

Integrando termo a termo:

$$\ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C$$

$$\text{Assim, } \int \frac{dx}{x^3-2x^2+x} = \ln|x| - \ln|x-1| - \frac{1}{x-1} + C.$$

SOLUÇÃO 112

Para resolver a integral

$$\int \frac{1}{1 - \cos x + \sin x} dx,$$

utilizamos a identidade trigonométrica para $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$, que nos permite reescrever $\sin x$ e $\cos x$ como

$$\sin x = \frac{2 \tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}, \quad \cos x = \frac{1 - \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

Fazendo a substituição $u = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$, obtemos $du = \frac{1}{2}(1 + u^2)dx$, e a integral se transforma em

$$\int \frac{2 du}{1 - \frac{1-u^2}{1+u^2} + \frac{2u}{1+u^2}}.$$

Simplificando, chegamos a

$$\int \frac{2 du}{u(u+1)}.$$

Decompondo em frações parciais, temos

$$\int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u+1} \right) du,$$

que integra para

$$\ln|u| - \ln|u+1| + C.$$

Revertendo a substituição, temos

$$\int \frac{1}{1 - \cos x + \sin x} dx = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) \right| - \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2}\right) + 1 \right| + C.$$

Com base na identidade

$$\frac{\tan\left(\frac{x}{2}\right)}{1 + \tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{\sin x}{1 + \cos x + \sin x},$$

finalmente, obtemos

$$\int \frac{1}{1 - \cos x + \sin x} dx = \ln \left| \frac{\sin x}{1 + \cos x + \sin x} \right| + C.$$

SOLUÇÃO 113

Para resolver a integral

$$\int \frac{1 + \sinh x}{1 + \cosh x} dx$$

Vamos distribuir o denominador nos dois termos do numerador:

$$\int \frac{1}{1 + \cosh x} dx + \int \frac{\sinh x}{1 + \cosh x} dx$$

A segunda integral é mais fácil de resolver, pois se chamarmos $u = 1 + \cosh x$ temos $du = \sinh x dx$ e aí fica $\int du/u = \ln|u| + C = \ln(1 + \cosh x) + C$. A primeira integral é resolvida manipulando o integrando primeiro, tendo em vista a definição de $\cosh x$:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{1}{1 + \cosh x} = \frac{2}{e^x + 2 + e^{-x}} = \frac{2}{(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{1 + \cosh x} dx = 2 \int \frac{1}{(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2} dx$$

Chamando $u = e^{\frac{x}{2}}$ temos $du = \frac{1}{2} e^{\frac{x}{2}} dx \therefore dx = \frac{2du}{u}$. Assim,

$$2 \int \frac{1}{(e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}})^2} dx = 4 \int \frac{du}{u(u + \frac{1}{u})^2} = 4 \int \frac{udu}{(u^2 + 1)^2}$$

Agora podemos fazer $v = u^2 + 1$ de modo que $dv = 2u du$ e aí segue que

$$4 \int \frac{udu}{(u^2 + 1)^2} = 2 \int \frac{dv}{v^2} = \frac{-2}{v} + C = \frac{-2}{u^2 + 1} + C = \frac{-2}{e^x + 1} + C$$

Finalmente,

$$\int \frac{1 + \sinh x}{1 + \cosh x} dx = \frac{-2}{e^x + 1} + \ln(1 + \cosh x) + C$$

SOLUÇÃO 114

Para resolver a integral

$$\int \frac{\ln^3(w)}{w\sqrt{\ln^2(w)-4}} dw$$

realizamos a seguinte substituição: $u = \ln(w)$, o que implica que $du = \frac{1}{w} dw$. Isso simplifica a integral para uma forma em termos de u , tornando-a mais fácil de resolver:

$$\int \frac{\ln^3(w)}{w\sqrt{\ln^2(w)-4}} dw = \int \frac{u^3}{\sqrt{u^2-4}} du$$

Chamando $t = u^2 - 4$ temos $\frac{1}{2} dt = u du$ de forma que a integral se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int \frac{(t+4)}{\sqrt{t}} dt &= \frac{1}{2} \int \frac{t}{\sqrt{t}} dt + 2 \int \frac{1}{\sqrt{t}} dt \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + 2 \cdot \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{3} (\ln^2(w)-4)^{3/2} + 4(\ln^2(w)-4)^{1/2} + C \\ &\therefore \frac{1}{3} \sqrt{\ln^2(w)-4} (\ln^2(w)+8) + C \end{aligned}$$

SOLUÇÃO 115

Para calcular

$$\int x \sin x \cos x dx,$$

utilizamos a identidade trigonométrica $\sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$, simplificando a integral para

$$\int \frac{x \sin(2x)}{2} dx.$$

Aplicamos a integração por partes com $u = x$ e $dv = \frac{\sin(2x)}{2} dx$, levando a $du = dx$ e $v = -\frac{\cos(2x)}{4}$. A aplicação da fórmula de integra-

ção por partes $\int u dv = uv - \int v du$ nos dá

$$-\frac{x \cos(2x)}{4} + \int \frac{\cos(2x)}{4} dx$$

que pode ser integrada diretamente para obter o resultado final:

$$-\frac{x \cos(2x)}{4} + \frac{\sin(2x)}{8} + C$$

SOLUÇÃO 116

A integral

$$\int \frac{\ln(\ln x)}{x} dx$$

é resolvida através da substituição $u = \ln x$, com $du = \frac{1}{x} dx$. A integral se torna

$$\int \ln(u) du = u \ln(u) - u + C = \ln(x)(\ln(\ln(x)) - 1) + C$$

onde $\int \ln(x) dx = x \ln(x) - x + C$ pode ser demonstrado fazendo integração por partes tomando $u = \ln(x)$ e $dv = 1 dx$.

SOLUÇÃO 117

A integral dada é $\int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos x} dx$. Para resolvê-la, usamos a identidade trigonométrica $\cos x = 2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - 1$, então $\sqrt{1 + \cos x} = \sqrt{2 \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \sqrt{2} \left| \cos\left(\frac{x}{2}\right) \right|$.

No intervalo de 0 a π , $\cos\left(\frac{x}{2}\right) \geq 0$ e no intervalo de π a 2π a função será negativa. Então a integral torna-se

$$\int_0^{\pi} \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx - \int_{\pi}^{2\pi} \sqrt{2} \cos\left(\frac{x}{2}\right) dx$$

$$= \sqrt{2} \left[2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \right]_0^{\pi} - 2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \Big|_{\pi}^{2\pi} = 4\sqrt{2}$$

A respeito da verificação, derivando $2\sqrt{2}\sin\left(\frac{x}{2}\right)$ recuperamos $\sqrt{1+\cos x}$ — aplique as regras de derivação que estudamos!

SOLUÇÃO 118

Para resolver a integral $\int \frac{\sqrt{2+x^2}-\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{4-x^4}} dx$, começamos fatorando o denominador como uma diferença de quadrados: $\sqrt{4-x^4} = \sqrt{(2+x^2)(2-x^2)}$. Distribuímos o denominador pelos termos do numerador e separamos a integral em duas partes:

$$\int \frac{\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{(2+x^2)(2-x^2)}} dx - \int \frac{\sqrt{2-x^2}}{\sqrt{(2+x^2)(2-x^2)}} dx$$

Simplificamos cada integral:

$$\int \frac{1}{\sqrt{2-x^2}} dx - \int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx$$

A primeira integral pode ser resolvida por uma substituição trigonométrica, $x = \sqrt{2}\sin(\theta)$, que nos dá $dx = \sqrt{2}\cos(\theta)d\theta$, transformando a integral em $\int \frac{1}{\sqrt{2-2\sin^2(\theta)}} \sqrt{2}\cos(\theta)d\theta = \int d\theta = \theta + C$.

Voltando para a variável original, $\theta = \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$, então a integral se torna $\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + C$.

A segunda integral, $\int \frac{1}{\sqrt{2+x^2}} dx$, pode ser resolvida com a substituição $x = \sqrt{2}\tan(\theta)$, o que implica $dx = \sqrt{2}\sec^2(\theta)d\theta$. A integral torna-se $\int \frac{\sqrt{2}\sec^2(\theta)}{\sqrt{2+2\tan^2(\theta)}} d\theta$. Simplificando e utilizando a identidade trigonométrica $\sec^2(\theta) = 1 + \tan^2(\theta)$, a integral se torna $\int \sec \theta d\theta = \ln|\sec \theta + \tan \theta| + C$.

Portanto, a integral é:

$$\arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - \ln\left(\frac{x}{\sqrt{2}} + \sqrt{1 + \frac{x^2}{2}}\right) + C$$

SOLUÇÃO 119

A integral dada é $\int \frac{\sin^3 x}{2 + \cos x} dx$. Primeiro, usamos a identidade trigonométrica para decompor o $\sin^3 x$ como $\sin x \cdot \sin^2 x$, e então aplicamos a identidade $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$. Isso nos dá:

$$\int \frac{\sin x(1 - \cos^2 x)}{2 + \cos x} dx$$

Expandimos o numerador e distribuímos o denominador, resultando em duas integrais:

$$\int \frac{\sin x}{2 + \cos x} dx - \int \frac{\sin x \cos^2 x}{2 + \cos x} dx$$

Para a primeira integral, fazemos a substituição $u = 2 + \cos x$, o que implica $du = -\sin x dx$. A integral torna-se:

$$-\int \frac{1}{u} du = -\ln|u| + C = -\ln|2 + \cos x| + C$$

Para a segunda integral, após a substituição $u = 2 + \cos x$, temos:

$$-\int \frac{(u-2)^2}{u} du = -\int \left(\frac{u^2 - 4u + 4}{u} \right) du$$

Expandindo e separando os termos, obtemos:

$$-\int \left(u - 4 + \frac{4}{u} \right) du$$

Integrando termo a termo, temos:

$$-\left(\frac{u^2}{2} - 4u + 4\ln|u| \right) + C$$

Substituindo u de volta por $2 + \cos x$, a expressão se torna:

$$-\left(\frac{(2 + \cos x)^2}{2} - 4(2 + \cos x) + 4\ln|2 + \cos x| \right) + C$$

Expandindo e simplificando, chegamos a:

$$-\left(\frac{1}{2} \cos^2 x + 2 \cos x + 2 - 8 - 4 \cos x + 4 \ln|2 + \cos x| \right) + C$$

$$= -\frac{1}{2} \cos^2 x + 2 \cos x + 6 - 4 \ln|2 + \cos x| + C$$

Portanto, juntando as contribuições das duas partes da integral original, obtemos:

$$= 3 \ln|2 + \cos x| + \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x - 6 + C$$

SOLUÇÃO 120

Para encontrar os valores de α e β na expressão $\sin 6x \cos x = \frac{1}{2}(\sin \alpha x + \sin \beta x)$, utilizamos a identidade trigonométrica $\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$. Assim, com $a = 6x$ e $b = x$, temos:

$$\sin 6x \cos x = \frac{1}{2}(\sin(6x+x) + \sin(6x-x)) = \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 5x)$$

Portanto, $\alpha = 7$ e $\beta = 5$. A integral $\int \sin 6x \cos x \, dx$ pode ser resolvida diretamente a partir da expressão encontrada:

$$\int \frac{1}{2}(\sin 7x + \sin 5x) \, dx = \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{7} \cos 7x - \frac{1}{5} \cos 5x \right) + C$$

SOLUÇÃO 121

Para resolver a integral $\int \frac{dx}{\sqrt{b^2 + a^2 x^2}}$, aplicamos a substituição $x = \frac{b}{a} \sinh(t)$, onde $\sinh(t)$ é a função seno hiperbólico. Isso nos dá $dx = \frac{b}{a} \cosh(t) \, dt$ e a integral se transforma em:

$$\int \frac{\frac{b}{a} \cosh(t) \, dt}{\sqrt{b^2 + a^2 \left(\frac{b}{a} \sinh(t)\right)^2}} = \int \frac{\frac{b}{a} \cosh(t) \, dt}{\sqrt{b^2 \cosh^2(t)}}$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{1}{a} \int dt = \frac{1}{a} t + C$$

Voltando à variável original x , $t = \sinh^{-1}\left(\frac{ax}{b}\right)$, portanto:

$$\frac{1}{a} \sinh^{-1} \left(\frac{ax}{b} \right) + C$$

SOLUÇÃO 122

A integral dada é $\int_{-1}^2 \ln(x+2) dx$. Para resolver, utilizamos a integração por partes, onde $u = \ln(x+2)$ e $dv = dx$. Então, $du = \frac{1}{x+2} dx$ e $v = x$. A fórmula de integração por partes é $\int u dv = uv - \int v du$, resultando em:

$$x \ln(x+2) - \int \frac{x}{x+2} dx$$

Para a integral $\int \frac{x}{x+2} dx$, podemos simplificar usando divisão longa ou decomposição, resultando em:

$$\int 1 - \frac{2}{x+2} dx = x - 2 \ln|x+2|$$

Portanto, a integral original é:

$$x \ln(x+2) - (x - 2 \ln|x+2|) \Big|_{-1}^2 \approx 2,54$$

SOLUÇÃO 123

Para calcular a integral $\int \arctan(\sqrt{x}) dx$, fazemos a substituição $u = \sqrt{x}$, o que nos dá $x = u^2$ e $dx = 2u du$. Assim, a integral torna-se:

$$\int \arctan(u) \cdot 2u du$$

Utilizando integração por partes, onde $v = \arctan(u)$ e $dw = 2u du$, obtemos $dv = \frac{1}{1+u^2} du$ e $w = u^2$. Aplicando a fórmula $\int v dw = vw - \int w dv$, temos:

$$u^2 \arctan(u) - \int \frac{u^2}{1+u^2} du$$

Para a integral $\int \frac{u^2}{1+u^2} du$, fazemos a simplificação $u^2 = (1 + u^2) - 1$ e separamos a integral em duas partes:

$$\int 1 - \frac{1}{1+u^2} du = u - \arctan(u)$$

Combinando os resultados e revertendo a substituição $u = \sqrt{x}$, obtemos:

$$x \arctan(\sqrt{x}) - (\sqrt{x} - \arctan(\sqrt{x})) + C$$

Simplificando, a integral é:

$$x \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + C$$

SOLUÇÃO 124

Para mostrar a integral $\int e^{ax} \cos(bx) dx = e^{ax} \frac{b \sin(bx) + a \cos(bx)}{a^2 + b^2}$, utilizamos integração por partes duas vezes. Primeiro, escolhemos $u = e^{ax}$ e $dv = \cos(bx) dx$, então $du = a e^{ax} dx$ e $v = \frac{1}{b} \sin(bx)$. Aplicando a fórmula de integração por partes $\int u dv = uv - \int v du$, temos:

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax} \sin(bx)}{b} - \int \frac{a e^{ax} \sin(bx)}{b} dx$$

Agora, aplicamos integração por partes novamente na segunda integral, com $u = e^{ax}$ e $dv = \sin(bx) dx$. Isso nos dá $du = a e^{ax} dx$ e $v = -\frac{1}{b} \cos(bx)$, resultando em:

$$- \int \frac{a e^{ax} \sin(bx)}{b} dx = - \frac{a e^{ax} \cos(bx)}{b^2} + \int \frac{a^2 e^{ax} \cos(bx)}{b^2} dx$$

Somando as partes, obtemos:

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = \frac{e^{ax} \sin(bx)}{b} - \left(- \frac{a e^{ax} \cos(bx)}{b^2} + \int \frac{a^2 e^{ax} \cos(bx)}{b^2} dx \right)$$

Isolando a integral original e simplificando, chegamos a:

$$\int e^{ax} \cos(bx) dx = e^{ax} \frac{b \sin(bx) + a \cos(bx)}{a^2 + b^2}$$

concluindo a demonstração.

SOLUÇÃO 125

Para mostrar que $\int_0^\pi \sin(\sqrt{x}) dx \leq \pi$, aplicamos o Teorema do Valor Médio, que afirma que se $f(x)$ é contínua em $[a, b]$, então existe pelo menos um $c \in [a, b]$ tal que:

$$\int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

Para $f(x) = \sin(\sqrt{x})$ no intervalo $[0, \pi]$, temos $0 \leq f(x) = \sin(\sqrt{x}) \leq 1$. Assim, para algum $c \in [0, \pi]$:

$$\int_0^\pi \sin(\sqrt{x}) dx = \sin(\sqrt{c})\pi$$

E como $\sin(\sqrt{c}) \leq 1$, temos:

$$\sin(\sqrt{c})\pi \leq \pi$$

Portanto, $\int_0^\pi \sin(\sqrt{x}) dx \leq \pi$.

SOLUÇÃO 126

Para calcular a derivada $\frac{d}{dx} \int_3^{\sin x} \frac{1}{1-t^2} dt$, aplicamos o Teorema Fundamental do Cálculo que nos diz que se $F(x) = \int_a^{g(x)} f(t) dt$, então $F'(x) = f(g(x)) \cdot g'(x)$. Portanto, para $f(t) = \frac{1}{1-t^2}$ e $g(x) = \sin x$, temos:

$$\frac{d}{dx} \int_3^{\sin x} \frac{1}{1-t^2} dt = \frac{1}{1-(\sin x)^2} \cdot \cos x = \frac{\cos x}{\cos^2 x}$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{d}{dx} \int_3^{\sin x} \frac{1}{1-t^2} dt = \sec x$$

SOLUÇÃO 127

Para resolver a integral $\int \frac{e^{\arctan x} + x \ln(1+x^2)+1}{1+x^2} dx$, distribuímos o denominador entre os termos do numerador e separamos em três integrais:

$$\int \frac{e^{\arctan x}}{1+x^2} dx + \int \frac{x \ln(1+x^2)}{1+x^2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx$$

Para a primeira integral, fazemos a substituição $u = \arctan x$, que nos dá $du = \frac{1}{1+x^2} dx$, transformando a integral em:

$$\int e^u du = e^u + C = e^{\arctan x} + C$$

Para a segunda integral, fazemos a substituição $v = \ln(1+x^2)$, o que nos dá $dv = \frac{2x}{1+x^2} dx$. Com isso, a integral se torna:

$$\frac{1}{2} \int dv = \frac{v}{2} + D = \frac{\ln(1+x^2)}{2} + D$$

A terceira integral é a integral padrão do arco tangente:

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + E$$

Somando as partes, obtemos a solução para a integral original:

$$e^{\arctan x} + \frac{\ln(1+x^2)}{2} + \arctan x + C$$

onde C é a constante de integração.

SOLUÇÃO 128

Para resolver a integral $\int \frac{\sec^4(\ln x)}{x} dx$, fazemos a substituição $u = \ln x$, que nos dá $du = \frac{1}{x} dx$ e a integral simplifica para $\int \sec^4 u du$.

Então, aplicamos a fórmula de redução para integrais de potências de secante, como demonstrada em exercício anterior:

$$\int \sec^n u \, du = \frac{1}{n-1} \sec^{n-2} u \tan u + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} u \, du$$

Para $n = 4$, temos:

$$\int \sec^4 u \, du = \frac{1}{3} \sec^2 u \tan u + \frac{2}{3} \int \sec^2 u \, du$$

A integral de $\sec^2 u$ é $\tan u$, portanto:

$$\int \sec^4 u \, du = \frac{1}{3} \sec^2 u \tan u + \frac{2}{3} \tan u + C$$

Retornando para a variável original x , temos:

$$\int \frac{\sec^4(\ln x)}{x} \, dx = \frac{1}{3} \sec^2(\ln x) \tan(\ln x) + \frac{2}{3} \tan(\ln x) + C$$

SOLUÇÃO 129

Para calcular a integral $\int x \arctan(\sqrt{x^2-1}) \, dx$, façamos a substituição $u = x^2 - 1$, o que nos dá $du = 2x \, dx$. Isso implica que $\frac{1}{2} du = x \, dx$, e a integral se transforma em:

$$\frac{1}{2} \int \arctan(\sqrt{u}) \, du$$

Como calculamos em questão anterior a integral de $\arctan(\sqrt{x})$, vamos usar este resultado, que é:

$$\int \arctan(\sqrt{x}) \, dx = x \arctan(\sqrt{x}) - \sqrt{x} + \arctan(\sqrt{x}) + C$$

Aplicando esse resultado à nossa integral com u em vez de x , temos:

$$\frac{1}{2} (u \arctan(\sqrt{u}) - \sqrt{u} + \arctan(\sqrt{u})) + C$$

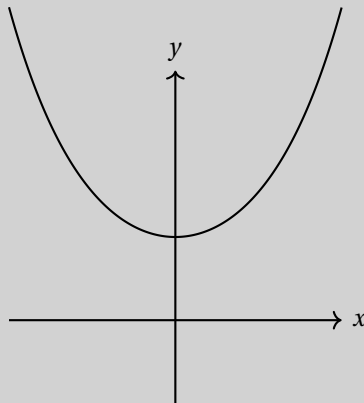
Substituindo u de volta por $x^2 - 1$, obtemos:

$$\frac{1}{2} \left((x^2 - 1) \arctan(\sqrt{x^2 - 1}) - \sqrt{x^2 - 1} + \arctan(\sqrt{x^2 - 1}) \right) + C$$

Simplificando e distribuindo o $\frac{1}{2}$, chegamos ao resultado final da integral:

$$\frac{x^2}{2} \arctan(\sqrt{x^2 - 1}) - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{2} + C$$

SOLUÇÃO 130



Para encontrar o comprimento do arco da catenária $y = a \cosh\left(\frac{x}{a}\right)$, usamos a fórmula do comprimento do arco $L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$. Primeiramente, calculamos a derivada de y em relação a x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} \left(a \cosh\left(\frac{x}{a}\right) \right) = \sinh\left(\frac{x}{a}\right).$$

Portanto, o termo sob a raiz quadrada na fórmula do comprimento do arco é:

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \sinh^2\left(\frac{x}{a}\right) = \cosh^2\left(\frac{x}{a}\right).$$

Isso nos permite simplificar a integral para:

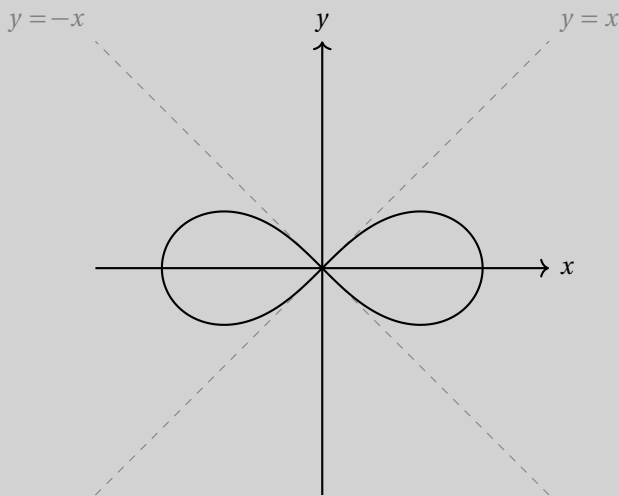
$$L = \int_0^{x_1} \cosh\left(\frac{x}{a}\right) dx.$$

Realizando a substituição $u = \frac{x}{a}$, temos $du = \frac{1}{a} dx$ e $dx = a du$. A integral se torna:

$$L = a \int_0^{\frac{x_1}{a}} \cosh(u) du = a [\sinh(u)]_0^{\frac{x_1}{a}} = a \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right).$$

Portanto, o comprimento do arco da catenária entre $(0, a)$ e (x_1, y_1) é $L = a \sinh\left(\frac{x_1}{a}\right)$.

SOLUÇÃO 131



Para determinar a área interior à lemniscata $\rho = a\sqrt{\cos 2\theta}$, utilizamos coordenadas polares. A fórmula da área em coordenadas polares é dada por $A = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \rho^2 d\theta$. A lemniscata tem simetria, então podemos calcular a área de uma das 'pétalas' e multiplicar por 2. A lemniscata é definida para $\cos 2\theta \geq 0$, então trabalhamos com o intervalo $[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}]$. A área de uma 'pétala' é:

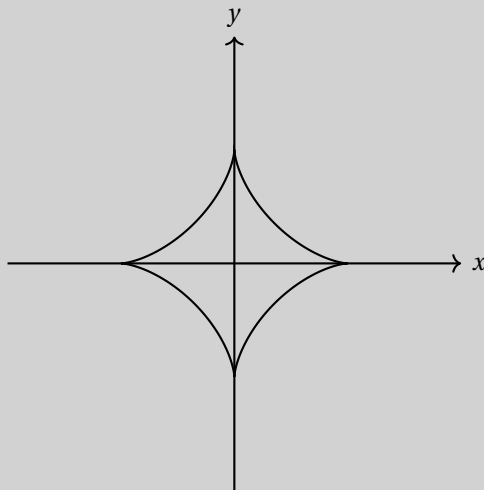
$$A_{\text{pétala}} = \frac{1}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (a \sqrt{\cos 2\theta})^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta d\theta.$$

Fazendo a substituição $u = 2\theta$, $du = 2d\theta$, e $d\theta = \frac{1}{2} du$, obtemos:

$$A_{\text{pétala}} = \frac{a^2}{4} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u du = \frac{a^2}{4} [\sin u]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{a^2}{4} [1 - (-1)] = \frac{a^2}{2}.$$

Portanto, a área total da lemniscata é $A = 2 \cdot A_{\text{pétala}} = a^2$.

SOLUÇÃO 132



Para encontrar a área A limitada pelo astróide dado pelas equações paramétricas $x = a \cos^3 \theta$ e $y = a \sin^3 \theta$, primeiro expressamos a integral da área em coordenadas polares, onde A é quatro vezes a integral de $y dx$ sobre um período de θ de 0 a $\frac{\pi}{2}$ devido à simetria da curva:

$$A = 4 \int_0^a y dx$$

Como $dx = \frac{dx}{d\theta} d\theta$, substituímos y e $\frac{dx}{d\theta}$ pelas suas expressões em

termos de θ :

$$A = 4 \int_0^{\pi/2} a \sin^3 \theta \cdot 3a \cos^2 \theta (-\sin \theta) d\theta$$

Simplificando, temos:

$$A = -12a^2 \int_0^{\pi/2} \sin^4 \theta \cos^2 \theta d\theta$$

Utilizando a identidade trigonométrica para $\sin^2 \theta \cos^2 \theta$, temos:

$$\sin^4 \theta \cos^2 \theta = (2 \sin \theta \cos \theta)^2 \frac{\sin^2 \theta}{4}$$

Aplicando a fórmula do ângulo duplo para o seno:

$$(2 \sin \theta \cos \theta)^2 \frac{\sin^2 \theta}{4} = \frac{1}{4} \sin^2 2\theta \frac{\sin^2 \theta}{2}$$

Continuando a simplificação:

$$\frac{1}{4} \sin^2 2\theta \frac{\sin^2 \theta}{2} = \frac{\sin^2 2\theta}{8} - \frac{\sin^2 2\theta \cos 2\theta}{8}$$

Que pode ser reescrito usando a identidade para $\sin^2 \theta$:

$$\frac{\sin^2 2\theta}{8} - \frac{\sin^2 2\theta \cos 2\theta}{8} = \frac{\sin^2 2\theta}{8} - \frac{\sin^2 2\theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{8}$$

E finalmente:

$$\frac{\sin^2 2\theta}{8} - \frac{\sin^2 2\theta (1 - 2 \sin^2 \theta)}{8} = \frac{1 - \cos 4\theta}{16} - \frac{\sin^2 2\theta \cos 2\theta}{8}$$

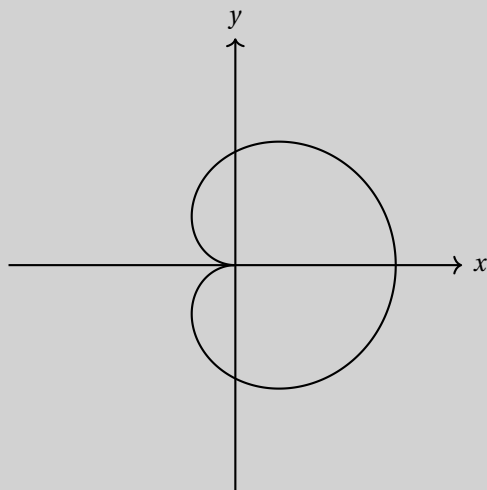
A integral torna-se:

$$A = 12a^2 \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 4\theta}{16} - \frac{\sin^2 2\theta \cos 2\theta}{8} \right) d\theta$$

Avaliando a integral e utilizando a linearidade e primitivas conhecidas de senos e cossenos, obtemos:

$$A = \frac{3\pi a^2}{8}$$

SOLUÇÃO 133



Para encontrar o comprimento da cardióide $\rho = a\sqrt{1+\cos\theta}$, usamos a fórmula do comprimento de arco em coordenadas polares, que é

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\rho^2 + \left(\frac{d\rho}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Aqui, $\rho = a\sqrt{1+\cos\theta}$ e a cardióide faz um laço completo quando θ varia de 0 a 2π . Primeiro calculamos a derivada de ρ em relação a θ :

$$\frac{d\rho}{d\theta} = \frac{d}{d\theta} (a\sqrt{1+\cos\theta}) = \frac{-a\sin\theta}{2\sqrt{1+\cos\theta}}.$$

Agora substituímos ρ e $\frac{d\rho}{d\theta}$ na fórmula do comprimento de arco e integramos de 0 a 2π :

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{(a\sqrt{1+\cos\theta})^2 + \left(\frac{-a\sin\theta}{2\sqrt{1+\cos\theta}}\right)^2} d\theta.$$

Após simplificação, o integrando se torna $\frac{a}{2}(1+\cos\theta)$, e a integral se torna:

$$L = \int_0^{2\pi} \frac{a}{2}(1+\cos\theta) d\theta,$$

que pode ser resolvida facilmente por integração direta após separá-la em duas para encontrar $L = 8a$.

SOLUÇÃO 134

Para determinar o comprimento do astróide definido por $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$, usamos sua representação paramétrica $x = a \cos^3 \theta$ e $y = a \sin^3 \theta$. O comprimento de arco em termos de uma função paramétrica é dado por:

$$L = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

Calculamos as derivadas:

$$\frac{dx}{d\theta} = -3a \cos^2 \theta \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3a \sin^2 \theta \cos \theta.$$

O comprimento de arco se torna:

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{9a^2 \cos^4 \theta \sin^2 \theta + 9a^2 \sin^4 \theta \cos^2 \theta} d\theta,$$

que simplifica para:

$$L = \int_0^{2\pi} 3a |\sin \theta \cos \theta| d\theta.$$

Usando a identidade trigonométrica $2 \sin \theta \cos \theta = \sin 2\theta$ e integrando diretamente (pois a integral da função seno é bem conhecida), encontramos $L = 6a$.

SOLUÇÃO 135

Primeiro, identificamos as dimensões do triângulo isósceles. Suponha que a altura do triângulo seja h e a metade da base seja b . A área do triângulo é então $A = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot h = bh$.

O baricentro de um triângulo isósceles está localizado a uma distância de $\frac{2}{3}h$ do vértice ao longo da mediana. Quando o triângulo gira em torno do eixo x , o baricentro descreve um círculo com raio $\frac{2}{3}h$ e, portanto, uma circunferência de comprimento $C = 2\pi\frac{2}{3}h$.

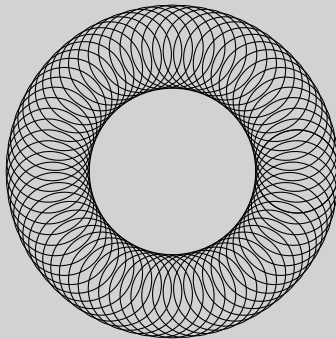
O volume do sólido de revolução gerado pela rotação do triângulo em torno do eixo x pode ser calculado pelo método dos discos:

$$V = \pi \int_0^{2b} \left(\frac{h}{2b} x \right)^2 dx = \pi \frac{h^2}{4b^2} \int_0^{2b} x^2 dx$$

Resolvendo a integral, obtemos $V = \pi \frac{h^2}{4b^2} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{2b} = \pi \frac{h^2}{4b^2} \cdot \frac{8b^3}{3} = \frac{2}{3}\pi b h^2$. Portanto, o volume do sólido é $V = \frac{2}{3}\pi b h^2$, que é igual ao produto da área do triângulo $A = bh$ pelo comprimento da circunferência $C = 2\pi\frac{2}{3}h$ gerada pelo baricentro.

SOLUÇÃO 136

O volume do toro pode ser calculado pelo método dos discos, considerando a rotação do círculo $x^2 + (y - b)^2 = a^2$ em torno do eixo Ox . A distância do centro do círculo ao eixo de rotação é b , e o raio do círculo é a .



Cada disco tem um raio que varia de 0 a a à medida que nos movemos ao longo do eixo Ox , e cada disco está a uma distância b do eixo Ox . Portanto, o volume do toro é a integral do volume de cada disco ao longo da circunferência completa do círculo

central do toro, que tem raio b .

O volume de um disco individual é $\pi r^2 \cdot dx$, onde r é a distância de um ponto no círculo ao eixo Ox , que varia de $b - a$ a $b + a$. O volume total do toro é, portanto, $V = \int_0^{2\pi} \pi a^2 \cdot b d\theta = 2\pi^2 a^2 b$, onde θ é o ângulo que o raio do círculo central faz com o eixo Ox . Assim, o volume do toro formado pela rotação do círculo dado em torno do eixo Ox é $V = 2\pi^2 a^2 b$.

SOLUÇÃO 137

Usemos a fórmula da área de uma superfície de revolução:

$$S = 2\pi \int y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

As derivadas são $\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t)$ e $\frac{dy}{dt} = a \sin t$. Substituindo e simplificando, obtemos

$$S = 2\pi \int a(1 - \cos t) \sqrt{a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t} dt$$

Usando a identidade trigonométrica $\sin^2 t + \cos^2 t = 1$ e simplificando, chegamos a

$$S = 2\pi a^2 \int (1 - \cos t)^2 dt$$

A integral de $(1 - \cos t)^2$ pode ser resolvida como $\int (1 - 2\cos t + \cos^2 t) dt$, que é igual a $t - 2\sin t + \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}\sin 2t$, após integração por partes e usando a identidade para $\cos^2 t$. Portanto, a área da superfície é

$$S = 2\pi a^2 \left(\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin 2t \right)$$

avaliada nos limites do arco da cicloide, de $t = 0$ a $t = 2\pi$ para um ciclo completo, resulta em $S = 6\pi^2 a^2$

SOLUÇÃO 138

Para calcular a área da superfície gerada pela rotação da função $f(x) = \cosh x$ em torno do eixo x , com $x \in [-1, 1]$, usamos a fórmula da área de superfícies de revolução:

$$S = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

A derivada de $f(x)$ é $f'(x) = \sinh x$, então $1 + (f'(x))^2 = 1 + \sinh^2 x$. Usando a identidade $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, obtemos $1 + \sinh^2 x = \cosh^2 x$. Substituindo na fórmula, temos

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 \cosh x \sqrt{\cosh^2 x} dx = 2\pi \int_{-1}^1 \cosh^2 x dx$$

A integral de $\cosh^2 x$ pode ser resolvida usando a identidade $\cosh 2x = 2\cosh^2 x - 1$, da qual obtemos $\cosh^2 x = \frac{\cosh 2x + 1}{2}$. Portanto,

$$S = 2\pi \int_{-1}^1 \frac{\cosh 2x + 1}{2} dx = \pi \left[\frac{1}{2} \sinh 2x + x \right]_{-1}^1$$

Avaliando os limites, obtemos

$$S = \pi(\sinh 2 - (-\sinh(-2)) + 2) = 2\pi(\sinh 2 + 1)$$

já que $\sinh x$ é uma função ímpar e $\sinh(-x) = -\sinh x$.

SOLUÇÃO 139

Para calcular a integral dada, fazemos uma substituição simples

$$u = x - 2$$

portanto,

$$x = u + 2 \quad \text{e} \quad dx = du$$

Substituindo, temos:

$$\begin{aligned}\int_1^2 (u+2)^2 u^{10} du &= \int_1^2 (u^2 + 4u + 4) u^{10} du \\ &= \int_1^2 u^{12} du + \int_1^2 4u^{11} du + \int_1^2 4u^{10} du\end{aligned}$$

Calculamos cada integral separadamente:

$$\begin{aligned}\int u^{12} du &= \frac{u^{13}}{13} \\ \int 4u^{11} du &= \frac{4u^{12}}{12} \\ \int 4u^{10} du &= \frac{4u^{11}}{11}\end{aligned}$$

Agora, revertendo a substituição e aplicando os limites:

$$\int_1^2 x^2(x-2)^{10} dx = \left(\frac{(x-2)^{13}}{13} + \frac{4(x-2)^{12}}{12} + \frac{4(x-2)^{11}}{11} \right) \Big|_1^2$$

Substituindo os valores dos limites de integração:

$$\int_1^2 x^2(x-2)^{10} dx = \frac{1}{13} - \frac{1}{3} + \frac{4}{11} = \frac{46}{429}$$

SOLUÇÃO 140

Para resolver a integral dada, aplicamos uma mudança de variável adequada

$$u = 2x - 1$$

O que implica que $du = 2dx$ ou $dx = \frac{du}{2}$. A partir dos limites de integração em x , encontramos que, quando $x = 0$, $u = -1$, e, quando $x = 1$, $u = 1$. Com isso, a integral original pode ser reescrita como

$$\int_0^1 f(2x-1) dx = \int_{-1}^1 f(u) \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int_{-1}^1 f(u) du$$

Dado que $\int_{-1}^1 f(u) du = 5$, substituímos este valor na expressão acima para obter

$$\int_0^1 f(2x-1) dx = \frac{1}{2} \cdot 5 = \frac{5}{2}$$

Que é o resultado procurado.

SOLUÇÃO 141

- (a) Para isso, consideramos a troca de variável $x \rightarrow -x$. Neste caso, temos que $dx \rightarrow -dx$. Além disso, por conta da mudança de variável feita, precisamos trocar o limite de interação também ($-r \rightarrow r$), resultando em:

$$\int_{-r}^0 f(x) dx = \int_r^0 f(-x)(-dx) = - \int_r^0 f(-x) dx$$

Como f é par, $f(-x) = f(x)$. . Portanto,

$$\int_{-r}^0 f(x) dx = - \int_r^0 f(x) dx$$

Podemos simplesmente remover o sinal da integral e inverter os extremos de integração, portanto:

$$\int_{-r}^0 f(x) dx = \int_0^r f(x) dx$$

Que é o resultado procurado.

- (b) Decompondo a integral no intervalo $[-r, r]$ em duas partes e usando o resultado do item (a), temos:

$$\begin{aligned}
 \int_{-r}^r f(x) dx &= \int_{-r}^0 f(x) dx + \int_0^r f(x) dx \\
 &= \int_0^r f(x) dx + \int_0^r f(x) dx \\
 &= 2 \int_0^r f(x) dx
 \end{aligned}$$

Graficamente, isso significa que a área sob a curva de $f(x)$ no intervalo $[-r, 0]$ é igual à área no intervalo $[0, r]$, devido à simetria de $f(x)$ em torno da origem.

SOLUÇÃO 142

Observemos que a função a ser integrada é $f(x) = \sin(nx) \cos(mx)$. Como estamos integrando de $-\pi$ a π , podemos verificar se a função é ímpar, o que facilitaria muito os cálculos. Para determinar se $f(x)$ é ímpar, calculamos $f(-x)$:

$$f(-x) = \sin(-nx) \cos(-mx)$$

Sabendo das identidades trigonométricas, temos:

$$\sin(-nx) = -\sin(nx) \quad \text{e} \quad \cos(-mx) = \cos(mx)$$

Assim,

$$f(-x) = -\sin(nx) \cos(mx) = -f(x)$$

Portanto, $f(x)$ é ímpar. Como a integral de uma função ímpar em um intervalo simétrico em relação à origem é zero, segue que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(mx) dx = 0$$

SOLUÇÃO 143

Vamos utilizar a identidade trigonométrica de produto para seno:

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

Aplicando essa identidade, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx) dx &= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2}(\cos((n-m)x) - \cos((n+m)x)) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) dx \end{aligned}$$

Analisamos agora dois casos para n e m :

- Caso 1: $n \neq m$

Para $n \neq m$, temos duas integrais de cossenos com frequências não nulas. Ambas as integrais resultam em zero devido à simetria da função cosseno em torno de $x = 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n-m)x) dx &= 0 \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) dx &= 0 \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx)\sin(mx) dx = 0 \quad \text{para } n \neq m$$

- Caso 2: $n = m$

$$\begin{aligned}
 \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(0) dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} dx - \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos((n+m)x) dx \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 2\pi - \frac{\sin(n+m)x}{n+m} \Big|_{-\pi}^{\pi} \\
 &= \pi - 0
 \end{aligned}$$

O segundo termo é nulo, pois $\sin(k\pi) = \sin(-k\pi) = 0$. Assim:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \pi \quad \text{para } n = m$$

Portanto, concluímos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(mx) dx = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m \\ \pi, & \text{se } n = m \end{cases}$$

SOLUÇÃO 144

Fazendo a substituição $u = 5x$, obtemos $du = 5 dx$ e, portanto, $dx = \frac{du}{5}$. Assim,

$$\int \cos^2(u) \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int \cos^2(u) du$$

Utilizamos a identidade trigonométrica $\cos^2(u) = \frac{\cos(2u)+1}{2}$, o que nos dá

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{5} \int \cos^2(u) du &= \frac{1}{5} \int \frac{\cos(2u)+1}{2} du \\
 &= \frac{1}{10} \int \cos(2u) du + \frac{1}{10} \int du
 \end{aligned}$$

Integrando cada termo separadamente, obtemos

$$\frac{1}{10} \int \cos(2u) du + \frac{1}{10} \int du = \frac{1}{10} \frac{\sin(2u)}{2} + \frac{u}{10} + C$$

Voltando à variável original x , temos $u = 5x$, logo,

$$\int \cos^2(5x) dx = \frac{\sin(10x)}{20} + \frac{x}{2} + C$$

SOLUÇÃO 145

Fazendo a substituição $u = \sin(x)$, temos $du = \cos(x) dx$ e reescrevemos a integral como

$$\int (1 + \sqrt{u}) \cos^2(x) \cos(x) dx = \int (1 + \sqrt{u}) \cos^2(x) du$$

Utilizando $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - u^2$, obtemos

$$\int (1 + \sqrt{u})(1 - u^2) du = \int (1 - u^2 + \sqrt{u} - u^{5/2}) du$$

Integrando termo a termo,

$$\int (1 - u^2 + u^{1/2} - u^{5/2}) du = u - \frac{u^3}{3} + \frac{2}{3} u^{3/2} - \frac{2}{7} u^{7/2} + C$$

Voltando para a variável x , temos o resultado final:

$$\int \cos^3(x) (1 + \sqrt{\sin x}) dx = \sin(x) - \frac{\sin^3(x)}{3} + \frac{2}{3} \sqrt{\sin^3(x)} - \frac{2}{7} \sqrt{\sin^7(x)} + C$$

SOLUÇÃO 146

Usando a equação apresentada na teoria do Livro:

$$S = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

Calculando a derivada de y em relação a x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4}{3}$$

Substituímos essa derivada na fórmula do comprimento de arco:

$$S = \int_0^2 \sqrt{1 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} dx$$

Simplificamos o termo dentro da raiz:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \sqrt{1 + \frac{16}{9}} dx \\ &= \int_0^2 \sqrt{\frac{25}{9}} dx \\ &= \int_0^2 \frac{5}{3} dx \end{aligned}$$

Agora, como $\frac{5}{3}$ é uma constante, podemos fatorá-la para fora da integral:

$$S = \frac{5}{3} \int_0^2 dx$$

Calculamos a integral restante:

$$\begin{aligned} S &= \frac{5}{3} x \Big|_0^2 \\ &= \frac{10}{3} \end{aligned}$$

Portanto, o comprimento do gráfico da função no intervalo dado é:

$$S = \frac{10}{3}$$

SOLUÇÃO 147

Usando a substituição $x = a \tan(\theta)$, temos $dx = a \sec^2(\theta) d\theta$. Substituindo na integral, obtemos:

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = \int \frac{a^2 \tan^2(\theta)}{(a^2 \tan^2(\theta) + a^2)^{3/2}} \cdot a \sec^2(\theta) d\theta$$

Simplificando o denominador usando a identidade trigonométrica $1 + \tan^2(\theta) = \sec^2(\theta)$, temos:

$$\int \frac{a^2 \tan^2(\theta)}{a^3 \sec^3(\theta)} \cdot a \sec^2(\theta) d\theta = \int \frac{a^3 \tan^2(\theta)}{a^3 \sec^3(\theta)} \sec^2(\theta) d\theta$$

Cancelando a^3 e simplificando, obtemos:

$$\int \frac{\tan^2(\theta)}{\sec(\theta)} d\theta$$

Usando $\tan^2(\theta) = \sec^2(\theta) - 1$, reescrevemos a integral como:

$$\int \frac{\sec^2(\theta) - 1}{\sec(\theta)} d\theta = \int \sec(\theta) d\theta - \int \cos(\theta) d\theta$$

Integrando termo a termo, obtemos:

$$= \ln |\sec(\theta) + \tan(\theta)| - \sin(\theta) + C$$

Retornando à variável original, lembrando que $x = a \tan(\theta)$, temos:

$$\tan(\theta) = \frac{x}{a} \quad \text{e} \quad \sec(\theta) = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}$$

Portanto, a solução final é (notemos que temos um triângulo retângulo de catetos a e x , e de hipotenusa $\sqrt{x^2 + a^2}$):

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx = \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| - \frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + C$$

SOLUÇÃO 148

A fórmula para o volume de um sólido de revolução em torno do eixo x , que foi desenvolvida no Livro, é dada por:

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Assim, temos:

$$V = \pi \int_0^3 \left(\frac{9}{x^2 + 9} \right)^2 dx$$

Simplificando a expressão dentro do integrando:

$$V = 81\pi \int_0^3 \frac{1}{(x^2 + 9)^2} dx$$

Aplicando a substituição $x = 3 \tan \theta$, temos $dx = 3 \sec^2 \theta d\theta$. Substituindo também os limites de integração:

$$x = 0 \iff \theta = 0 \quad x = 3 \iff \theta = \frac{\pi}{4}$$

Substituindo na integral, obtemos:

$$V = 81\pi \int_0^{\pi/4} \frac{1}{(9 \sec^2 \theta)^2} \cdot 3 \sec^2 \theta d\theta = 3\pi \int_0^{\pi/4} \cos^2 \theta d\theta$$

Usando a identidade $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos(2\theta)}{2}$, reescrevemos a integral como:

$$V = 3\pi \int_0^{\pi/4} \frac{1 + \cos(2\theta)}{2} d\theta = \frac{3\pi}{2} \int_0^{\pi/4} (1 + \cos(2\theta)) d\theta$$

Integrando termo a termo:

$$V = \frac{3\pi}{2} \left[\theta + \frac{1}{2} \sin(2\theta) \right]_0^{\pi/4}$$

Substituindo os limites:

$$V = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \cdot 1 \right) = \frac{3\pi}{2} \left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \right)$$

Simplificando, obtemos o volume final do sólido:

$$V = \frac{3\pi^2}{8} + \frac{3\pi}{4}$$

SOLUÇÃO 149

Para resolver a integral $\int x^2 \sin^2 x \, dx$ por partes, começamos escrevendo a expressão de $\sin^2 x$ em termos de cosseno duplo:

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$$

Assim, substituímos na integral original:

$$\int x^2 \sin^2 x \, dx = \int x^2 \frac{1 - \cos 2x}{2} \, dx = \frac{1}{2} \int x^2 \, dx - \frac{1}{2} \int x^2 \cos 2x \, dx$$

A primeira integral é direta:

$$\frac{1}{2} \int x^2 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + C_1 = \frac{x^3}{6} + C_1$$

Para resolver a segunda integral $\int x^2 \cos 2x \, dx$, utilizamos integração por partes, com $u = x^2$ e $dv = \cos 2x \, dx$. Assim, temos:

$$du = 2x \, dx \quad \text{e} \quad v = \frac{\sin 2x}{2}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \int x^2 \cos 2x \, dx &= x^2 \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot 2x \, dx \\ &= \frac{x^2 \sin 2x}{2} - \int x \sin 2x \, dx \end{aligned}$$

Agora, aplicamos novamente integração por partes na integral $\int x \sin 2x \, dx$, tomando $u = x$ e $dv = \sin 2x \, dx$:

$$du = dx \quad \text{e} \quad v = -\frac{\cos 2x}{2}$$

Portanto,

$$\int x \sin 2x \, dx = -\frac{x \cos 2x}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2} \, dx$$

$$= -\frac{x \cos 2x}{2} + \frac{\sin 2x}{4} + C_2$$

Assim, substituindo tudo, obtemos:

$$\int x^2 \sin^2 x \, dx = \frac{x^3}{6} - \frac{x^2 \sin 2x}{4} - \frac{x \cos 2x}{4} + \frac{\sin 2x}{8} + C$$

SOLUÇÃO 150

Utilizando a substituição $u = 1 + x^5$, de modo que $du = 5x^4 \, dx$ ou $dx = \frac{du}{5x^4}$, temos

$$\int x^4 (1 + x^5)^5 \, dx = \int x^4 u^5 \cdot \frac{du}{5x^4} = \int \frac{u^5}{5} \, du$$

Simplificando, obtemos:

$$\frac{1}{5} \int u^5 \, du = \frac{1}{5} \cdot \frac{u^6}{6} = \frac{u^6}{30}$$

Substituindo $u = 1 + x^5$, obtemos:

$$\int x^4 (1 + x^5)^5 \, dx = \frac{(1 + x^5)^6}{30} + C$$